

Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ЗАДАЧИ ИЗ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 13

Д. О. ШКЛЯРСКИЙ, Н. Н. ЧЕНЦОВ,
И. М. ЯГЛОМ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ЗАДАЧИ ИЗ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

513
Ш 66
УДК 513

Книга имеет форму задачника с указаниями и подробными решениями. Все сведения, необходимые для понимания задач, изложены в тексте книги. Многие из собранных здесь задач предлагались участникам московских школьных математических кружков и олимпиад. Некоторые из задач заимствованы из серьезных научных работ, относящихся к новому разделу математики — комбинаторной геометрии.

Книга рассчитана на интересующихся математикой учащихся старших классов средней школы и студентов-математиков младших курсов.

Давид Оскарович Шклярский, Николай Николаевич Ченцов, Исаак Моисеевич Яглом

Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии

(Серия: «Библиотека математического кружка»)

М., 1974., 384 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Головина*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Сигал, М. Л. Медведская*

Сдано в набор 25/IX 1973 г. Подписано к печати 2/IV 1974 г.
Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 3. Физ. печ. л. 12. Условн. печ. л 20,16.
Уч.-изд. л. 24,57. Тираж 70 000 экз. Цена книги 87 к. Заказ № 800

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Ш $\frac{20203-057}{053(01)-74}$ 85-73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой очередной (но ни в какой мере не зависящий от предыдущих) том из ряда сборников задач, выросших из деятельности школьного математического кружка при Московском государственном университете и из (первоначально тесно связанных со школьным кружком при МГУ) математических олимпиад московских школьников. Такое происхождение книги отражено уже в списке ее авторов, первый и старший из которых в возрасте 23 лет погиб в партизанском отряде более чем 30 лет тому назад. С именем студента Додика Шклярского связаны многие традиции той работы с интересующимися математикой школьниками, которую и по сей день ведут студенты механико-математического факультета МГУ; в частности, от него идет упор в этой работе на решение задач повышенной трудности[1]). Поэтому мы сочли уместным и в этой книге, как и в некоторых ей предшествующих, поставить на первое место в списке авторов имя человека, который не мог, конечно, принимать реального участия в работе по ее составлению, но который оказал значительное влияние на составителей. Однако наряду с традициями, идущими еще от довоенных времен, в книге отражаются и некоторые более свежие влияния — и о них хочется сказать здесь несколько более подробно.

Эту книгу можно рассматривать как завершающий этап работы по переработке вышедшего более 20 лет тому назад сборника задач по элементарной геометрии[2]); при этом в процессе подготовки нового варианта

---

[1]) Истории кружка при МГУ посвящена статья в сборнике [11] (см. список литературы на стр. 356—366), где рассказано о той роли, которую сыграл здесь Давид Оскарович Ш к л я р с к и й (1918—1942).

[2]) Имеется в виду книга: Д. О. Ш к л я р с к и й, Н. Н. Ч е н ц о в, И. М. Я г л о м, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, геометрия (планиметрия), М., Гостехиздат, 1952.

названной книги она настолько разрослась, что ее оказалось уместным выпустить в свет в виде трех отдельных томов (двумя остальными являются книги [4] и [13]). При этом авторам пришлось учитывать то, что за истекшие 20 лет сама элементарная геометрия коренным образом изменила свое лицо; это повлекло за собой необходимость изменения и характера посвященного ей задачника. В самом деле, если еще сравнительно недавно основное содержание элементарной геометрии составляли задачи на доказательство и на построение, связанные со свойствами треугольников, окружностей и фигур, получаемых комбинированием многоугольников и окружностей (именно такие задачи, к слову сказать, составляли большинство в указанном в последней сноске сборнике), то сегодня это направление вызывает сравнительно малый интерес. Последнее частично объясняется тем, что «традиционная элементарная геометрия» была в значительной степени порождена теми разделами математики, расцвет которых относился к XIX, но отнюдь не к XX веку (и которые сами уже в значительной степени утратили свой былой блеск в глазах ученых и любителей математики) — *синтетической геометрией* [1]) и *проективной геометрией* [2]). Однако «природа не терпит пустоты» — и место «классической» элементарной геометрии на наших глазах начинают занимать некоторые новые направления, связанные с актуальной сегодня проблематикой [3]).

Говоря о тех сдвигах в общенаучных интересах, которые вызвали определенное «смещение акцентов» в математике, задевшее и элементарную геометрию, надо в первую очередь сказать об одном специфическом типе задач, которые в настоящее время привлекают большое внимание математиков и «потребителей» математики. Мы имеем в виду так называемые «задачи на оптимизацию», ставящие своей целью нахождение «оптимального» (самого лучшего) или по крайней мере «достаточно хоро-

[1]) Так называется то направление геометрии, которое игнорирует идущие от Р. Декарта «аналитические» методы, основанные на методе координат и по существу сводящие геометрию к алгебре.

[2]) См., например, гл. 14 книги Г. С. М. Коксетер [8].

[3]) Ср. И. М. Яглом, Элементарная геометрия прежде и теперь, М., «Знание», 1972. (Заметим, что сопоставление настоящей книги с названным в подстрочном примечании [2]) на предыдущей странице задачником может служить выразительной иллюстрацией ряда сформулированных в этой брошюре положений.)

шего» режима работы отдельного механизма или большой системы (механической, биологической, экономической или какой-либо еще). Характерный для нашего времени интерес к задачам такого рода вызвал к жизни целый ряд новых направлений математики — своего рода новых «математических наук», развивающихся с большой интенсивностью. Этот поворот к новой тематике отразился и на геометрии, определив, в частности, подъем внимания к одной возникшей еще в XIX веке ветви математики, — к так называемой *дискретной геометрии* (о ней см., например, [24] и [25]), неожиданным образом «попавшей в струю» современных исканий.

Основные задачи дискретной геометрии касаются «плотнейших укладок» равных фигур и «редчайших покрытий» равными фигурами — здесь требуется *расположить*, скажем, *в некоторой ограниченной области* Φ плоскости или пространства *наибольшее возможное число непересекающихся «копий» заданной фигуры F или покрыть* Φ *наименьшим числом равных F фигур*[1]). Такая постановка задач идет от теории чисел — и первые серьезные результаты в области дискретной геометрии получили создатели геометрических методов теории чисел: немецкий математик Г. Минковский, русские Г. Ф. Вороной, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, норвежец А. Туэ. Впоследствии, однако, этим направлением заинтересовались и геометры. Особенно возросло внимание к дискретной геометрии, когда выяснилось, что многие ее результаты приложимы в некоторых из связанных с «оптимизационными задачами» новых направлениях математики (например, в имеющей большое прикладное значение «теории кодирования», изучающей оптимальные режимы работы тех или иных линий связи).

Другое направление геометрических исследований, родственное дискретной геометрии и первоначально находившееся в тесной связи с последней, представляет собой так называемая *комбинаторная геометрия*. Под этим названием понимают раздел геометрии, в котором рассматриваются задачи о нахождении в том или ином

[1]) Наибольшую роль в дискретной геометрии играют задачи о «плотнейшей укладке» фигур на всей (бесконечной!) плоскости или во всем пространстве и о «редчайшем покрытии» всей плоскости или всего пространства; однако в такой постановке эти задачи дальше, чем сформулированные нами, от (в первую очередь интересующей нас здесь!) проблематики комбинаторной геометрии.

отношении «оптимальных» конфигураций, образованных к о н е ч н ы м ч и с л о м точек или геометрических фигур. При этом типичные для комбинаторной геометрии задачи связаны с оценкой тех или иных ц е л ы х ч и с е л — обычно числа точек или фигур, которые могут входить в удовлетворяющую условиям задачи конфигурацию. Именно таким характером рассматриваемых здесь задач и объясняется прилагательное «комбинаторная» — ведь *комбинаторикой* называется раздел алгебры, в котором подсчитывается число тех или иных комбинаций к о н е ч н о г о ч и с л а элементов, удовлетворяющих заданным в формулировке задачи условиям.

Задачи комбинаторной геометрии отличаются очень большим разнообразием; при этом формулировки их, как правило, опираются лишь на самые простые геометрические понятия и факты и доступны любому школьнику. Решения же задач комбинаторной геометрии зачастую оказываются весьма сложными; целый ряд основных для этого раздела задач не решен и по сей день. Однако эта тематика подсказывает и ряд задач, которые можно предложить начинающему математику, например интересующемуся математикой школьнику старших классов, — именно такие задачи и составляют основное содержание настоящего сборника.

Рукопись книги была прочитана Н. Б. Васильевым и Л. И. Головиной, замечания которых позволили внести в текст целый ряд усовершенствований. Очень полезно было обсуждение отдельных задач с молодыми математиками, из числа которых особо хочется отметить Ф. Л. Варпаховского, Г. А. Гальперина, В. Л. Гутенмахера, А. М. Леонтовича и И. И. Яглома. Б. Грюнбаум (Сиэттль, США) и Г. А. Тоноян (Ереван) обратили мое внимание на не замеченную мною ранее литературу, имеющую отношение к теме книги; первый из них поделился также своими соображениями, касающимися одной из приведенных в книге задач. На разных стадиях подготовки книги к печати мне оказывали содействие многие мои друзья; здесь в первую очередь хотелось бы назвать Л. И. Головину, без помощи которой эта книга, вероятно, никогда не увидела бы света. Мне приятно выразить здесь искреннюю признательность всем, кто так или иначе принял участие в создании этой книги.

И. М. Яглом

УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Настоящая книга представляет собой сборник задач, условия которых сопровождаются довольно подробными комментариями. Эти комментарии содержат определения некоторых незнакомых широкому читателю понятий, связанных с рассматриваемыми задачами; иногда — краткую историю вопроса и указание на возможные «продолжения» тематики задач и на связанные с ней нерешенные вопросы; зачастую — ссылки на дополнительную, иногда довольно специальную литературу. Книга может быть использована в работе школьного или студенческого кружка (или просеминара) и для самообразования. При использовании книги в работе кружка естественным является рассказ руководителя об общей тематике задач и, возможно, разбор решений некоторых наиболее характерных или наиболее трудных задач; однако желательно, чтобы бо́льшую часть задач участники кружка решили сами. Руководителю следует особо обратить внимание учащихся на (указанные в тексте книги или найденные самостоятельно) нерешенные пока задачи, ибо с тематикой книги связано много доступных для начинающих проблем, которые могут послужить трамплином для последующей исследовательской работы. Порядок разбора на кружке полученных его участниками результатов может быть, например, близок к описанному на стр. 21—22 книги Д. Пойа «Математическое открытие» (М., «Наука», 1970).

Для того чтобы облегчить руководителю мотивированный выбор тематики кружка, скажем несколько подробнее о содержании настоящей книги. Собранные в ней задачи разбиты на шесть отдельных циклов, причем деление это в значительной степени условно — так, например, ясно, что задачи 82, 83 цикла 5 и некоторые сле-

дующие за ними свободно могли бы быть отнесены к циклу 1, а задачи 61—63, 64 б) и некоторые другие из цикла 4 — к циклу 3. Эта условность членения материала книги между отдельными циклами задач частично задевает даже книги [4] и [13], предшествующие настоящей, в которых также затронуты некоторые темы, которые были бы вполне уместны и в настоящей книге, — обстоятельство, о котором стоит, быть может, предупредить преподавателя, собирающегося использовать эту книгу в работе математического кружка. Непосредственно *комбинаторной геометрии* (о ней говорится в Предисловии к книге) посвящены лишь два последних цикла задач, на которые хочется особо обратить внимание читателей. Однако и многие другие задачи — в первую очередь это относится, пожалуй, к циклам 2 и 3 — также навеяны комбинаторной геометрией.

Несколько иной характер имеют циклы 1 и 4 — они порождены тем разделом геометрии, из которого выделилась комбинаторная геометрия, а именно *теорией выпуклых фигур* (см. определения на стр. 55—56). В геометрии созданная в XIX веке теория выпуклых фигур занимает сегодня очень большое место. Связано это с тем, что общее понятие «геометрической фигуры» как произвольного множества точек плоскости или пространства является на самом деле настолько сложным, что его и к геометрии-то относить рискованно; сегодня это понятие скорее считают относящимся к *топологии*[1]) или к математическому анализу (к *теории множеств*). Никакие геометрические подходы к понимаемой таким образом «теории фигур» просто невозможны, — и для того чтобы очертить круг «доступных геометрии» объектов, приходится накладывать на рассматриваемые «фигуры» те или иные дополнительные ограничения, самым простым и естественным из которых является требование выпуклости. В настоящее время теория выпуклых фигур выросла в большую, активно развивающуюся науку со своими методами и свойственной только ей тематикой[2]); значение этой теории сильно возросло и в силу

[1]) Так называется выделившаяся в XX веке из геометрии наука, характеризующаяся органическим слиянием методов и точек зрения, идущих от геометрии, алгебры и математического анализа.

[2]) По этому поводу см., например, [27]—[30] или книгу: Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, М., Гостехиздат, 1956.

того, что на ее методах в значительной степени основаны *дискретная геометрия* и *комбинаторная геометрия* (см. Предисловие). Отражением возросшего значения теории выпуклых фигур является то, что в большинстве стран мира понятие выпуклой фигуры входит сегодня в школьный курс математики [1]).

Самыми простыми (плоскими) выпуклыми фигурами являются выпуклые многоугольники; при этом очень важной является *возможность заменить произвольную плоскую выпуклую фигуру F «сколь угодно близким к ней» выпуклым многоугольником M*, например, вписанным в F. На обсуждение смысла взятого в кавычки выражения в известной мере нацелен цикл задач 1, в котором, впрочем, это обсуждение не доводится до конца; строго доказывается и подробно обсуждается сформулированное утверждение, скажем, в книге [30] или в статье [28]. Выделенное курсивом свойство выпуклых многоугольников позволяет считать их, в каком-то смысле, «самыми главными» (плоскими) выпуклыми фигурами — очень многие свойства выпуклых многоугольников удается затем автоматически перенести на все выпуклые фигуры, основываясь на этой возможности «приблизить» каждую выпуклую фигуру выпуклыми многоугольниками. Это обстоятельство делает соблазнительной попытку изложения некоторой части общей теории выпуклых фигур на (доступном и привычном школьникам!) уровне выпуклых многоугольников. Настоящий сборник задач ни в какой мере не претендует, конечно, на решение столь общей методической задачи; однако нам хочется порекомендовать читателям продумать вопрос о возможности переноса тех или иных результатов собранных в цикле 4 задач на (произвольные!) плоские выпуклые фигуры.

Звездочками в настоящей книге отмечены те задачи, которые нам кажутся более трудными, а двумя звездочками — самые трудные задачи. Все содержание книги разбито на три части. Первую из них составляют *условия задач.* Предполагается, что читатель начнет с попытки самостоятельного решения задачи. Если это ему не удастся, то он может заглянуть в конец книги, где собра-

[1]) См., например, А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов, Геометрия, 6 кл., М., «Просвещение», 1972, п. 39 § 1 гл. II; Э. Монз, Ф. Даунс, Геометрия, М., «Просвещение», 1972, § 4 гл. 3.

ны *ответы* или *указания* к решению, с тем, чтобы далее продолжать думать над решением задачи. Вторую часть книги составляют *решения задач*; их следует читать лишь после того, как задачу удалось решить самому (ибо сравнение найденного решения с приведенными в книге может оказаться поучительным) или если задача очень уж долго не поддается решению. Впрочем, в случае задач, номера которых помечены звездочкой, или — тем более! — двумя звездочками, этот порядок работы может быть и изменен: здесь не зазорно начать попытку решения задачи сразу с ознакомления с приведенным в конце книги «указанием», или даже просто ознакомиться с приведенным во второй части книги «решением», рассматривая соответствующий текст как включенную в настоящий задачник «теорию».

К книге приложен довольно обстоятельный список литературы (не претендующий, впрочем, на полноту и не исчерпывающий все использованные составителем источники), настолько подробный, что его объем надо, видимо, специально аргументировать. Первая часть списка адресована читателю, заинтересовавшемуся не какой-либо конкретной задачей из числа собранных в настоящем сборнике, а всем тем направлением, которое этот сборник представляет. В этой части библиографии перечислен ряд книг и статей (в подавляющем большинстве своем вполне доступных начинающему математику), уделяющих много места тематике, близкой к той, которой посвящена настоящая книга. Для удобства читателей эта часть списка литературы имеет дополнительную рубрикацию и названные в ней книги и статьи иногда сопровождаются краткими аннотациями, характеризующими их содержание. Однако основную часть списка литературы составляет его вторая часть, содержащая перечень работ, непосредственно связанных с собранными здесь задачами; эти работы разбиты на шесть групп, отвечающих шести циклам задач. Второй раздел библиографического списка обращен в первую очередь не к учащемуся, а к преподавателю, пожелавшему использовать эту книгу в своей работе. Еще одна категория лиц, на которых рассчитан обстоятельный список литературы, — это те читатели, которые пожелали бы испробовать свои силы в попытке самостоятельной исследовательской работы в области комбинаторной геометрии. Хочется обратить внимание на то, что

«классическая» элементарная геометрия достигла своего настоящего развития в первую очередь благодаря усилиям лиц, не причислявших себя к профессионалам-математикам, — более всего усилиям многочисленных школьных учителей в разных странах мира. Нам кажется, что и комбинаторная геометрия, которая смело может претендовать на положение «элементарной геометрии наших дней», в состоянии заложить фундамент для самостоятельного научного творчества многих любителей математики, начиная с учащихся средней школы — и при составлении настоящей книги мы хотели дать начинающим математикам материал для их исследовательской работы.

Список задач, предлагавшихся на математических олимпиадах

Многие из собранных в настоящем сборнике задач в разные годы предлагались на московских, всесоюзных, международных и других школьных математических олимпиадах (о порядке проведения которых см. [4], а также книги [11] и [12], специально посвященные московским и международным олимпиадам); нижеследующая таблица (не претендующая на абсолютную полноту) содержит номера этих задач:

Олимпиада	Номера задач
Московская, I тур	2, 14, 23, 24, 25 а)—б), 26 а), 46 а)—б), 47, 79 а), 97 б)
Московская, II тур	3 б), 10, 11, 15 а)—б), 19, 21, 33 а), 35, 45 в), 51, а)—б), 52 а), 57 а), 58, 64 б), 67 б), 95а), 106
Всероссийская	80
Всесоюзная	16, 18 а), 48, 54 а), 55 а)
Международная	38 а), 87а)
Всесоюзная заочная	40, 119
Британская	81, 94 б), 120 б)
Венгерская (им. Й. Кюршака)	3 а), 4, 26 в)

При этом задачи 3 б), 10, 14, 15 а), 16, 23, 24, 26 а), 33 а), 45 в), 46 а), 57 а), 58, 79 а) и 97 б) предлагались учащимся 7-х или 8-х классов, а остальные — учащимся старших классов.

ЗАДАЧИ

1. ОЦЕНКИ РАССТОЯНИЙ

В этом небольшом цикле собраны задачи, связанные с оценками расстояний между точками или между фигурами. Центральными здесь, видимо, следует считать несложные задачи 6—10, посвященные важному понятию *расстояния между двумя фигурами* (например, между двумя линиями) Φ_1 и Φ_2 (ср. § 4 книги [29] или п. 2.4 статьи [28]). Относительно общего понятия расстояния между двумя объектами X и Y, которые могут быть самой разной природы, см., например, Ю. А. Шрейдер [38].

1. В пространстве даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что наибольшим из всех расстояний MM_1, где $M \in ABC$[1]), а $M_1 \in A_1B_1C_1$, является самый большой из девяти отрезков AA_1, AB_1, AC_1, BA_1, BB_1, BC_1, CA_1, CB_1 и CC_1.

2. В пространстве даны два отрезка AB и A_1B_1. Докажите, что расстояние между их серединами M и M_1 не превосходит полусуммы расстояний AA_1 и BB_1 между концами отрезков и не меньше (абсолютной величины) полуразности расстояний AA_1 и BB_1.

В каком случае $MM_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$? А когда $MM_1 = \frac{1}{2}|AA_1 - BB_1|$?

3. В пространстве даны два отрезка AC и BD длины 1. Докажите, что:

а) хоть одно из расстояний AB, BC, CD и DA не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) если отрезки AC и BD пересекаются, то хоть одно из расстояний AB, BC, CD и DA не больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

[1]) То есть точка M принадлежит треугольнику ABC; треугольник здесь понимается как *часть плоскости*, ограниченная отрезками AB, BC и CA.

в) если отрезки AC и BD лежат в одной плоскости, но не пересекаются, то хоть одно из расстояний AB, BC, CD и DA больше 1.

4. Пусть выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AC + CD \geqslant AB + BD$. Докажите, что в этом случае вершина A четырехугольника расположена ближе к вершине B, чем к вершине C.

Сохраняет ли силу утверждение настоящей задачи, если четырехугольник $ABCD$ не выпуклый?

5. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что:

а) если точки B и C принадлежат отрезку AD и симметричны относительно середины S этого отрезка, то сумма расстояний любой точки M плоскости от точек A и D не меньше суммы расстояний той же точки от точек B и C;

б) обратно, если сумма расстояний любой точки M плоскости от точек A и D не меньше суммы расстояний той же точки от точек B и C, то точки B и C принадлежат отрезку AD и симметричны относительно середины S этого отрезка.

6. а) Радиусы двух окружностей S_1 и S_2 равны r_1 и r_2, а расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно d. Чему равно наименьшее расстояние между точками окружностей? Чему равно наибольшее расстояние между их точками?

б) Ответьте на тот же вопрос с заменой окружностей S_1 и S ограниченными этими окружностями кругами K_1 и K_2.

Ясно, что ни наибольшее расстояние между точками двух фигур, ни наименьшее из этих расстояний не характеризуют близость самих фигур друг к другу: так, на рис. 1, *а* фигуры F_1 и F_2 далеки одна от другой, а наименьшее расстояние AB между их точками мало; на рис. 1, *б* линии L_1 и L_2 почти совпадают, а наибольшее расстояние MN между их точками велико. Гораздо лучше характеризует взаимное расположение двух фигур Φ_1 и Φ_2 следующая величина. Для каждой точки A фигуры Φ_1 найдем самую близкую к ней точку B фигуры Φ_2 (рис. 2); далее определим наибольшее расстояние A_0B_0 из всех таких расстояний AB. Это расстояние A_0B_0 называется *расстоянием от фигуры* Φ_1 *до фигуры* Φ_2 и обозначается через $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$.

Величины, строение которых сходно со строением величины $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$, встречаются в современной (особенно прикладной) математике довольно часто; поэтому на процессе образования числа $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$ уместно остановиться более подробно. Наибольшее из какого-то множества чисел $M = \{a, b, c, \ldots\}$ (в фигурных скоб-

ках выписаны числа рассматриваемого множества) часто обозначается символом

$$\max\,[a,\ b,\ c,\ \dots] \qquad \text{или} \qquad \max_{x \in M} x;$$

здесь буквы max образуют сокращение латинского слова maximum — «наибольший», а запись $x \in M$ читается так: «число x

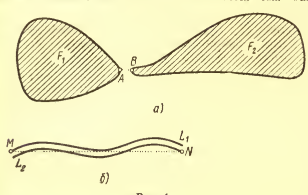


Рис. 1.

принадлежит множеству M», или «x — какое-то число из множества M» ($\in$ — теоретико-множественный знак принадлежности объекта заданной совокупности, или множеству, элементов). Аналогично этому наименьшее из чисел того же множества $M = \{a, b, c, \dots\}$ обозначается так:

$$\min\,[a,\ b,\ c,\ \dots] \qquad \text{или} \qquad \min_{x \in M} x,$$

где min есть сокращение латинского слова minimum — «наименьший». Выше мы видели, что величины

$$\min_{A_1 \in \Phi_1,\ A_2 \in \Phi_2} A_1A_2 \qquad \text{и} \qquad \max_{A_1 \in \Phi_1,\ A_2 \in \Phi_2} A_1A_2$$

Рис. 2.

(первая запись читается так: «наименьшее из расстояний A_1A_2, где точка A_1 принадлежит фигуре Φ_1, а точка A_2 — фигуре Φ_2»; аналогичный смысл имеет и вторая запись) являются мало удачными характеристиками отклонения фигуры Φ_2 от фигуры Φ_1. Гораздо лучше подходит для этой цели величина $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$, которая определяется так: сначала мы, фиксировав какую-либо точку A (которая в дальнейшем будет считаться принадлежащей фигуре Φ_1), образуем

$$\min_{B \in \Phi_2} AB,$$

т. е. минимум всех расстояний AB, где B — произвольная точка фигуры Φ_2; полученную величину обозначают символом $\rho(A, \Phi_2)$

и часто называют *расстоянием от точки A до фигуры* Φ_2 [1]). Затем ищется величина

$$\max_{A\in\Phi_1,\, B\in\Phi_2}\min AB \quad \text{(или точнее, } \max_{A\in\Phi_1}(\min_{B\in\Phi_2} AB)\text{)},$$

т. е. максимум всевозможных величин $\min\limits_{B\in\Phi_2} AB$, полученный в предположении, что A пробегает все точки фигуры Φ_1; этот «максимум всех минимумов» и обозначается через $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$.

Впоследствии в этой книге мы еще не раз встретимся с величинами, образованными аналогичным образом (ср., например, стр. 24 или 35).

Остановимся, наконец, еще на одном моменте, хотя и несущественном для задач этого цикла, но заслуживающем внимания с точки зрения обсуждаемых в последующих циклах проблем. Под *фигурой* мы понимаем произвольное множество точек; но при этом, скажем, уже $\min\limits_{B\in\Phi} AB$, где A — какая-то фиксированная точка плоскости, а Φ — (плоская) фигура, вполне может и не *существовать*. В самом деле, пусть K — скажем, множество всех в н у т р е н н и х точек круга с центром O и радиусом r (т. е. таких точек M, что $OM < r$; при этом точки N ограничивающей наш круг

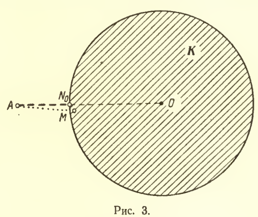


Рис. 3.

окружности Σ, для которых $ON = r$, мы к K *не причисляем*), а A — внешняя по отношению к кругу точка; в таком случае $\min\limits_{M\in K} AM$ не существует, ибо если N_0 — (первая) точка пересечения луча AO с окружностью Σ (рис. 3), то для всех $M\in K$ имеем $AM > AN_0$, но среди точек $M\in K$ найдутся такие, для которых AM с к о л ь у г о д н о б л и з к о к AN_0. В случае, когда

[1]) Вспомните, например, известное определение расстояния от точки A до прямой a как длины d перпендикуляра, опущенного из A на a; ясно, что $d = \rho(A, a)$.

$\min\limits_{B \in \Phi} AB$ не существует, расстояние $\rho(A, \Phi)$ от A до Φ определяют как (*точную*) *нижнюю грань*, или *инфимум*[1]) длин всех отрезков AB, где $B \in \Phi$:

$$\rho(A, \Phi) = \inf_{B \in \Phi} AB;$$

при этом величина $\xi = \inf\limits_{x \in X} x$, где X — некоторое множество чисел, определяется из условий: $x \geqslant \xi$ для всех $x \in X$; существуют $x \in X$, сколь угодно близкие к ξ (так что если $\min\limits_{x \in X} x$ существует, то $\inf\limits_{x \in X} x = \min\limits_{x \in X} x$). Точно так же в тех случаях, когда не существует $\max\limits_{A \in \Phi_1} \rho(A, \Phi_2)$, часто удобно рассматривать (*точную*) *верхнюю грань*, или *супремум*[2]) величин $\rho(A, \Phi_2)$, где $A \in \Phi_1$:

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{A \in \Phi_1} \rho(A, \Phi_2) = \sup_{A \in \Phi_1} \inf_{B \in \Phi_2} AB;$$

при этом $\sup\limits_{y \in Y} y$ определяется как такое число η, что $y \leqslant \eta$ для всех $y \in Y$, но разность $\eta - y$, где $y \in Y$, может быть сколь угодно малой. При этом, если определить расстояние $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$ от фигуры Φ_1 до фигуры Φ_2 так:

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{A \in \Phi_1} \inf_{B \in \Phi_2} AB,$$

то, скажем, расстояние между внутренностями двух кругов не будет отличаться от расстояния между самими кругами.

7. а) Пусть T_1 и T_2 — контуры двух параллельно расположенных на плоскости равносторонних треугольников с общим центром и со сторонами, соответственно равными 1 и 2. Чему равно расстояние $\rho(T_1, T_2)$ от T_1 до T_2? Чему равно расстояние $\rho(T_2, T_1)$ от T_2 до T_1?

б) Пусть K_1 и K_2 — контуры двух параллельно расположенных кубов с общим центром и с ребрами 1 и 2. Чему равно расстояние $\rho(K_1, K_2)$ от K_1 до K_2? Чему равно расстояние $\rho(K_2, K_1)$ от K_2 до K_1?

Из результатов задачи 7 вытекает, что определенное выше расстояние от одной фигуры до другой *не симметрично*: расстояние $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$ от фигуры Φ_1 до фигуры Φ_2 может и не равняться расстоянию $\rho(\Phi_2, \Phi_1)$ от фигуры Φ_2 до фигуры Φ_1. Однако это «расстояние» удовлетворяет другому важному свойству обычных расстояний.

---

[1]) infimum — по-латыни *низшее*.

[2]) supremum — по-латыни *высшее*.

8. Пусть Φ_1, Φ_2 и Φ_3 — три произвольные фигуры.

а) Докажите, что сумма расстояний от Φ_1 до Φ_2 и от Φ_2 до Φ_3 не меньше расстояния от Φ_1 до Φ_3:

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) + \rho(\Phi_2, \Phi_3) \geqslant \rho(\Phi_1, \Phi_3).$$

б) Может ли иметь место неравенство

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) + \rho(\Phi_2, \Phi_3) < \rho(\Phi_3, \Phi_1)?$$

Иногда оказывается удобнее характеризовать отклонение фигуры Φ_1 от фигуры Φ_2 *наибольшим из* определенных ранее *расстояний от* Φ_1 *до* Φ_2 *и от* Φ_2 *до* Φ_1. Полученная таким образом величина называется *расстоянием между фигурами* Φ_1 *и* Φ_2 и обозначается через $P(\Phi_1, \Phi_2)$; таким образом:

$$P(\Phi_1, \Phi_2) = \max[\rho(\Phi_1, \Phi_2), \rho(\Phi_2, \Phi_1)].$$

Ясно, что расстояние $P(\Phi_1, \Phi_2)$ уже *симметрично*: для любых двух фигур Φ_1 и Φ_2 всегда

$$P(\Phi_1, \Phi_2) = P(\Phi_2, \Phi_1).$$

Кроме того, $P(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ в том случае, когда фигуры Φ_1 и Φ_2 совпадают[1]).

9. а) Пусть S_1 — окружность с центром O_1 и радиусом r_1, S_2 — окружность с центром O_2 и радиусом r_2; расстояние O_1O_2 между центрами S_1 и S_2 обозначим через d. Чему равно расстояние $\rho(S_1, S_2)$ от окружности S_1 до окружности S_2 и расстояние $P(S_1, S_2)$ между этими двумя окружностями?

б) Изменятся ли рассматриваемые расстояния при замене окружностей S_1 и S_2 кругами K_1 и K_2, ограниченными этими окружностями?

в) Пусть Φ_1, Φ_2, Φ_3 — три фигуры. Докажите, что сумма расстояний между Φ_1 и Φ_2 и между Φ_2 и Φ_3 не меньше расстояния между Φ_1 и Φ_3:

$$P(\Phi_1, \Phi_2) + P(\Phi_2, \Phi_3) \geqslant P(\Phi_1, \Phi_3).$$

10. На листе бумаги поставлена клякса. Для каждой внутренней точки A кляксы находим ближайшую к ней точку B ограничивающей кляксу линии; затем из всех полученных таким образом (для разных точек

---

[1]) Или «почти совпадают» — так, например, равно нулю расстояние между окружностью S и той же самой окружностью S' с одной «выколотой» (т. е. исключенной из рассмотрения) точкой.

[По поводу еще одного определения расстояния между (плоскими) фигурами (так называемое «симметричное расстояние») см. ниже, стр. 54.]

кляксы) расстояний AB выбираем самое большое расстояние A_1B_1. Аналогично для каждой внутренней точки A кляксы мы находим и самую далекую от A точку C ограничивающей кляксу линии; затем из всевозможных (образованных для всех точек кляксы) расстояний AC находим самое маленькое расстояние A_2C_2.

а) Какое из расстояний больше: A_1B_1 или A_2C_2?

б) Может ли иметь место равенство $A_1B_1 = A_2C_2$? Если может, то для кляксы какой формы?

Разумеется, задаче 10 можно придать следующую форму. Для каждой внутренней точки A плоской фигуры Φ («кляксы») находим ту из точек ограничивающей Φ линии Γ, которая ближе всего к A; расстояние AB от A до этой точки B линии Γ обозначаем через $\mu(A)$, а наибольшее из всех расстояний $AB = \mu(A)$, образованных для всех внутренних точек фигуры Φ — просто через μ ($= A_1B_1$). Аналогично этому пусть $\nu(A) = AC$ — расстояние от A до самой далекой от A точки C линии Γ, а $\nu = A_2C_2$ — наименьшее из всех расстояний $\nu(A)$, образованных для всех точек $A \in \Phi$.

Таким образом, содержание задачи 10 составляет сравнение двух величин [1])

$$\mu = \max_{A\in\Phi} \mu(A) = \max_{A\in\Phi} \min_{B\in\Gamma} AB \quad \text{и} \quad \nu = \min_{A\in\Phi} \nu(A) = \min_{A\in\Phi} \max_{C\in\Gamma} AC$$

(ср. выше, стр. 16).

11. Расстояния от некоторой точки M до вершин A и B равностороннего треугольника ABC равны $MA = 2$ и $MB = 3$. Чему может равняться расстояние MC от точки M до третьей вершины треугольника?

12. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{1000}$ — какие угодно 1000 точек плоскости. Докажите, что на любой окружности радиуса 1 найдется точка M, сумма расстояний от которой до точек $A_1, A_2, \ldots, A_{1000}$ не меньше 1000.

13*. На плоскости дана ломаная $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ такая, что

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = 1$$

и

$$60^\circ \leqslant \angle A_0A_1A_2 \leqslant \angle A_1A_2A_3 \leqslant \angle A_2A_3A_4 \leqslant \ldots \leqslant \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n \leqslant 120^\circ;$$

[1]) Точнее здесь было бы писать

$$\mu = \sup_{A\in\Phi} \inf_{B\in\Gamma} AB \quad \text{и} \quad \nu = \inf_{A\in\Phi} \sup_{C\in\Gamma} AC$$

(ср. со сказанным на стр. 17).

при этом каждые два звена ломаной, соседние с одним и тем же звеном, расположены по одну сторону от него (рис. 4). Докажите, что, каково бы ни было число n, расстояние A_0A_n никогда не превзойдет 3.

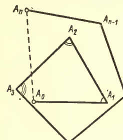


Рис. 4.

14. На плоскости даны две точки A и B, расстояние между которыми равно d. Постройте квадрат, на границе которого лежат эти точки, так, чтобы сумма расстояний от точки A до вершин квадрата была наименьшей из возможных. Чему равна эта сумма?

15. Через одну точку O проходят четыре прямые l_1, l_2, l_3 и l_4 (прямые занумерованы в порядке вращения часовой стрелки; см. рис. 5). Через произвольную точку A_1 прямой l_1 проведена прямая $A_1A_2 \parallel l_4$ до пересечения с l_2 в точке A_2; через точку A_2 проведена прямая $A_2A_3 \parallel l_1$ до пересечения с l_3 в точке A_3; через точку A_3 проведена прямая $A_3A_4 \parallel l_2$ до пересечения с l_4 в точке A_4; через A_4 проведена прямая $A_4B \parallel l_3$ до пересечения с l_1 в точке B.

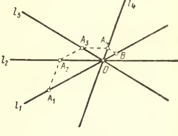


Рис. 5.

а) Докажите, что $OB < \frac{1}{2} OA_1$.

б) Докажите, что, более того, всегда $OB \leqslant \frac{1}{4} OA_1$. Может ли быть улучшена и эта последняя оценка?

2. ОЦЕНКИ УГЛОВ

Центральное место в этом цикле задач занимают тесно связанные между собой задачи 25—32, начинающиеся со сравнительно простых вопросов и быстро приводящие к весьма сложным задачам или к проблемам, которые сегодня не умеет решить никто. При этом некоторые из не решенных до сих пор задач, связанных с оценками углов, могут оказаться и не очень трудными, и мы рекомендуем читателю постараться самостоятельно ответить на те или иные из поставленных ниже и не имеющих пока ответов вопросов

или самому сформулировать новые задачи, родственные собранным здесь.

При решении задач этого цикла следует иметь в виду определенное «коварство» рассматриваемой в нем проблематики: здесь совсем простые по условию задачи сплошь и рядом оказываются весьма нелегкими, причем сложность двух, казалось бы, весьма схожих задач зачастую является совсем разной. Так, в то время как задача 25 г) является сравнительно простой, в точности аналогичная ей задача об оценке **наибольшего** из образованных n точками углов до сих пор не решена, хотя ее пытались решить многие известные математики; подобно этому из двух весьма близких по формулировке задач 32 и 34 (ср. сказанное по этому поводу на стр. 33) вторая решается совсем легко, а первая является одной из труднейших во всей книге. Поучительно также сопоставление задач 31 а) и 32 а) с их стереометрическими аналогами 31 б) и 32 б) (или даже сравнение совсем простой задачи 33 а) с задачей 33 б)), иллюстрирующее типичное для комбинаторной геометрии резкое возрастание трудностей при переходе от планиметрических проблем к стереометрическим или «многомерным» (ср. со сказанным на стр. 33 в связи с задачей 32).

16. Семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри семиугольника, то сумма углов при вершинах A_1, A_3 и A_5 меньше 450°.

17. Пусть M — произвольная точка, лежащая внутри правильного n-угольника. Докажите, что найдутся две такие вершины A и B n-угольника, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 180^\circ \leqslant \angle AMB \leqslant 180^\circ.$$

18. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке.

а) Докажите, что угол A треугольника больше 45°.

б) Укажите все значения, которые может иметь $\angle A$ при выполнении условий задачи.

19. Какие значения может иметь угол, под которым диагональ куба видна из точки его поверхности (концы диагонали исключаются из рассмотрения)?

20. В кольце, ограниченном концентрическими окружностями радиусов R и r с центром O, взяты две точки A и B; расстояние AB равно 1. Какое наименьшее значение может иметь угол AOB?

21. Как провести n лучей с началом в одной точке плоскости так, чтобы сумма всевозможных попарных углов между этими лучами была наибольшей из возможных? (Под углом между двумя лучами здесь

понимается угол, не превосходящий 180°.) Чему равно это наибольшее возможное значение суммы углов?

22. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — какие-то k положительных чисел. На луче OX откладывается отрезок $OX_1 = x_1$, где x_1 — какое-то одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; затем на луче $X_1Y \perp OX_1$ откладывается отрезок $X_1X_2 = x_2$, где x_2 — еще одно из тех же чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и луч X_1Y обращен в такую сторону, что направление вращения от луча OX_1 к лучу OX_2 противоположно направлению вращения часовой стрелки (рис. 6); затем на луче $X_2Y_1 \perp OX_2$ откладывается отрезок $X_2X_3 = x_3$, где x_3 — еще одно из тех же k чисел, и направление вращения от OX_2 к OX_3 совпадает с направлением вращения от OX_1 к OX_2, и т. д.; наконец, на луче $X_{k-1}Y_{k-2} \perp OX_{k-1}$ откладывается отрезок $X_{k-1}X_k = x_k$, где x_k — последнее из k чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и луч OX_{k-1} поворачивается до положения OX_k в направлении, обратном направлению вращения часовой стрелки. Докажите, что при данных числах $a_1, a_2, \ldots, a_k$ «полный» угол поворота X_1OX_k будет наибольшим, если

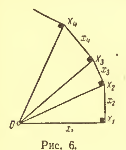


Рис. 6.

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_k,$$

и будет наименьшим, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_k.$$

23. На плоскости дано семь прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что найдутся две из этих прямых, угол между которыми меньше 26°.

24. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый n-угольник?

Для того чтобы пояснить содержание последующей группы задач, нам будет удобно обратиться к одной задаче, которая была включена в предшествующий выпуск серии «Библиотека математического кружка» (см. задачу 45 а) из книги [4]), но по существу целиком примыкает к настоящему циклу.

Задача. *На плоскости даны три точки A, B, C; углы треугольника ABC мы обозначим через α, β и γ, где $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. Какие значения могут иметь величины углов α, β и γ?*

Для каких троек точек A, B, C достигаются наибольшее и наименьшее значения углов α, β и γ?

Решение. Ясно, что наименьший угол α треугольника ABC не может быть больше 60°, поскольку сумма всех трех его

углов равна $180° = 3 \cdot 60°$; однако значение 60° угол α принимать может (рис. 7, *а*). С другой стороны, угол α может быть сколь угодно мал; если же считать, что точки A, B и C могут принадлежать одной прямой (они образуют в этом случае «вырожденный»

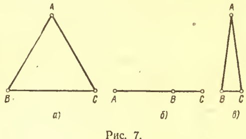


Рис. 7.

треугольник), то становится возможным и равенство $\alpha = 0$ (рис. 7, *б*, где $\angle BAC = \angle BCA = 0$). Таким образом,

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 60°.$$

Аналогично наибольший угол β треугольника ABC не может быть меньше 60° (ибо иначе сумма трех углов была бы меньше $3 \cdot 60° = 180°$); равенство же $\beta = 60°$ является возможным (рис. 7, *а*). Ясно также, что угол β может быть сколь угодно близок к 180° или даже равен 180° (так, на рис. 7, *б* $\angle ABC$ «треугольника» ABC равен 180°). Итак

$$60° \leqslant \beta \leqslant 180°.$$

Наконец, «средний» угол γ треугольника, как мы уже видели, может быть равен 0 (ибо на рис. 7, *б* равны нулю два угла «треугольника» ABC). Ясно также, что угол γ никак не может быть тупым или прямым; однако он может быть сколь угодно близок к прямому (см. рис. 7, *в*, где угол A равнобедренного треугольника ABC очень мал). Поэтому

$$0 \leqslant \gamma < 90°.$$

Ясно, что как значение $\alpha = 60°$, так и значение $\beta = 60°$ достигаются лишь для точек A, B, C, являющихся вершинами *равностороннего* треугольника; значения же $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ и $\beta = 180°$ достигаются для любых трех точек *одной прямой* [1]).

Строго говоря, нам следовало бы еще доказать, что углы α, β и γ могут принимать любые значения в указанных пределах. Однако эта последняя часть решения задачи (сводящаяся, скажем, к *построению* треугольника ABC, наименьший угол A кото-

[1]) Заметьте, что значения $\alpha = 60°$ и $\beta = 60°$ достигаются для единственной конфигурации точек (с точностью до ее замены любой подобной ей, что, разумеется, вообще не меняет никаких углов). Однако значения $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ и $\beta = 180°$ достигаются для многих конфигураций, ибо точка B на рис. 7, *б* может быть *произвольно* расположена на отрезке AC.

рого равен заданному углу α, произвольно выбранному в пределах $0 < \alpha < 60°$) является довольно простой, и ее можно опустить.

Заметим еще, что определение самого малого возможного значения α и самого большого возможного значения β не представляет никакого труда: конечно, наименьший угол треугольника может быть сколь угодно мал (а для «вырожденного» треугольника он может равняться 0), а наибольший угол может быть сколь угодно близок к 180° (и даже равен 180°). Таким образом, интерес здесь представляет лишь определение наибольшего возможного значения α и наименьшего значения β — и эти последние задачи настолько характерны для современной математики, что о них стоит поговорить подробнее.

Для того чтобы пояснить, что именно в условиях этих двух задач является особенно типичным, мы несколько изменим обозначения. Будем рассматривать всевозможные треугольники $M_1M_2M_3$ плоскости; углы такого треугольника при вершинах M_1, M_2 и M_3 мы обозначим через α_1, α_2 и α_3. При этом наименьшим может оказаться любой из углов α_1, α_2, α_3; этот *наименьший* угол мы обозначим так:

$$\min_j \alpha_j, \qquad \text{где} \qquad j = 1,\ 2 \text{ или } 3$$

(т. е. «минимум» — или наименьшая — из величин α_1, α_2, α_3). Аналогично этому *наибольший* из углов α_1, α_2, α_3 обозначается символом

$$\max_j \alpha_j, \qquad \text{где} \qquad j = 1,\ 2,\ 3$$

(ср. выше, стр. 15).

Условимся еще тройку $\{M_1, M_2, M_3\}$ точек плоскости обозначать символом $\mathscr{P}_3$. В таком случае задачу оценки наибольшего возможного значения наименьшего из углов α_1, α_2, α_3 (т. е. наибольшего значения величины $\min_j \alpha_j$) можно записать так: *найти*

$$\max_{\mathscr{P}_3} \min_j \alpha_j, \qquad \text{где} \qquad j = 1,\ 2 \text{ или } 3; \quad \mathscr{P}_3 = \{M_1,\ M_2,\ M_3\}$$

(найти максимум по всевозможным тройкам $\mathscr{P}_3 = \{M_1, M_2, M_3\}$ точек плоскости минимума по j величины α_j). Аналогично этому задача оценки наименьшего значения наибольшего угла β треугольника (т. е. величины $\max_j \alpha_j$) в наших новых обозначениях записывается так: *найти*

$$\min_{\mathscr{P}_3} \max_j \alpha_j, \quad j = 1,\ 2,\ 3; \quad \mathscr{P}_3 = \{M_1,\ M_2,\ M_3\}.$$

Именно этот («минимаксный» и «максминный») характер задач об оценках углов α и β треугольника ABC мы и хотели подчеркнуть.

Обратимся теперь к вопросу об оценке среднего угла γ. Здесь сразу не ясно, составляет ли «главную» часть задачи оценка величины γ сверху или снизу; однако поскольку из рис. 7, *б* видно, что равенство $\gamma = 0$ является возможным, то нам остается найти лишь величину $\max \gamma$. Но тут нас подстерегает сюрприз: оказывается, что наибольшего возможного значения γ вообще не существует — угол γ может быть сколь угодно близок к 90°, но равенство $\gamma = 90°$ невозможно. В таком случае говорят, что у вели-

чины γ иет максимума, но существует (*точная*) *верхняя грань*, или *супремум* — такое число Γ, что γ не может превзойти Γ, но может быть сколь угодно близка к Γ (ср. выше стр. 17). В нашем случае верхняя грань Γ угла γ равна 90°, что записывается так:

$$\sup \gamma = 90^\circ \quad (\text{или } \sup_{\mathscr{P}_3} \gamma = 90^\circ).$$

Нетрудно понять, с чем связано отсутствие максимума у величины γ. Ясно, что величины $\max_j \alpha_j$ или $\min_j \alpha_j$ наверное существуют: ведь из трех углов α_1, α_2 и α_3 всегда возможно указать наибольший (конечно, наибольшими могут явиться и два из наших углов или даже все три — если все они равны) и наименьший. Однако число всевозможных троек $\mathscr{P}_3 = \{M_1, M_2, M_3\}$ точек плоскости является бесконечным. Поэтому здесь уже нельзя ручаться, что найдется такая тройка, которой отвечает наибольшее значение угла γ: ведь переходить от одной тройки $\mathscr{P}_3$ точек к другой, которой отвечает большее значение угла γ, мы можем сколь угодно много раз — и при этом может оказаться, что каждый раз остается какая-то тройка $\mathscr{P}_3$, «лучшая», чем все встречавшиеся нам ранее. Поэтому мы можем расценить лишь как нашу удачу то обстоятельство, что для величин α и β их верхние грани (первая из которых равна 60°, а вторая — 180°) достигаются, т. е. что существует $\max \alpha$ и $\max \beta$. Для величины же γ ее (*точная*) *нижняя грань* (или *инфимум* — ср. стр. 17) достигается (и равна 0), а $\sup \gamma = 90^\circ$ недостижим, подобно тому как для величины $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, $\sup \frac{1}{n} = 1$ достигается $\left(\text{к этому значению } \frac{1}{n} \text{ мы приходим, положив } n = 1\right)$, но $\inf \frac{1}{n} = 0$ недостижим (т. е. величина $\frac{1}{n}$ имеет максимум, но не имеет минимума).

Ряд задач, о которых ниже пойдет речь, начинается с совсем простых задач 25 а) — в) и с обобщающей их результаты задачи 25 г), лишь немногим более сложной, чем ее частные случаи:

25. а) Даны четыре точки плоскости. Докажите, что из этих точек можно выбрать три, являющиеся вершинами треугольника, один из углов которого не превосходит 45°; однако расположение точек может быть таким, что ни один из треугольников, вершинами которых служат три из наших точек, не имеет меньшего 45° угла [1]).

б) Даны пять точек плоскости. Докажите, что из этих точек можно выбрать три, являющиеся вершинами треугольника, один из углов которого не превосходит 36°; однако расположение точек может быть таким, что

[1]) Три точки, принадлежащие одной прямой, здесь рассматриваются как вершины «треугольника», с углами 0, 0 и 180°.

ни один из треугольников, образованных тремя из них, не имеет угла меньшего 36°.

в) Даны шесть точек плоскости. Докажите, что из этих точек всегда можно выбрать три, являющиеся вершинами треугольника, один угол которого не превосходит 30°; однако расположение точек может быть таким, что ни один из образованных этими точками треугольников не имеет угла, меньшего 30°.

г) На плоскости даны n точек. Докажите, что из этих точек можно выбрать три, являющиеся вершинами треугольника, один из углов которого не превосходит $\frac{180^\circ}{n}$; однако расположение точек может быть таким, что ни один из треугольников, вершинами которых служат какие-то три из наших n точек, не имеет угла, меньшего $\frac{180^\circ}{n}$.

Каким должно быть расположение n точек, для того чтобы ни один из образованных тройками точек треугольников не имел угла, меньшего $\frac{180^\circ}{n}$?

Поясним связь задач 25 а) — г) с разобранной выше задачей об оценке углов треугольника. Пусть на плоскости дано n точек $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$; всевозможные углы $M_iM_jM_k$ (где i, j и k принимают любые разные значения из числа номеров 1, 2, ..., n) мы обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$, где N — число всевозможных троек i, j, k различных номеров (или «индексов»), каждый из которых может иметь одно из значений 1, 2, 3, ... или n [1]). Наименьший из углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ мы обозначим просто через α; таким образом,

$$\alpha = \min_J \alpha_J, \quad \text{где} \quad J = 1, 2, 3, \ldots \text{ или } N.$$

Ясно, что наименьшее значение, которое может принимать величина α, образуемая для разных систем $\mathscr{P}_n = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$

---

[1]) Число N, или $N(n)$, таких троек равно утроенному числу C_n^3 треугольников с вершинами в данных точках, где $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ — *число сочетаний из n элементов по* 3; таким образом,

$$N(n) = 3C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2};$$

в частности,

$$N(4) = 12, \quad N(5) = 30 \quad \text{и} \quad N(6) = 60.$$

Впрочем, точное значение величины $N(n)$ нам нигде ниже не понадобится.

из n точек плоскости, есть просто 0; $\alpha=0$, если какие-либо три из наших точек *принадлежат одной прямой*. Зададимся теперь целью найти наибольшее возможное значение, или *максимум*, величины α, достигаемый при подходящем выборе системы $\mathcal{P}_n$ из n точек плоскости; эту величину мы обозначим через $\bar{\alpha}$ или, поскольку она, очевидно, зависит от числа n точек, — через $\bar{\alpha}(n)$:

$$\bar{\alpha}(n)=\max_{\mathcal{P}_n}\alpha=\max_{\mathcal{P}_n}\min_{J}\alpha_J,$$

$$J=1,\ 2,\ \ldots \text{ или } N(n),\quad \mathcal{P}_n=\{M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n\}.$$

Задача 25 г) утверждает, что

$$\bar{\alpha}(n)=\frac{180^\circ}{n};\qquad (*)$$

в частности (см. разобранную выше задачу об оценке углов треугольника и задачи 25 а) — в)),

$$\bar{\alpha}(3)=60^\circ,\quad \bar{\alpha}(4)=45^\circ,\quad \bar{\alpha}(5)=36^\circ \quad \text{и} \quad \bar{\alpha}(6)=30^\circ.$$

Таким образом, скажем, для случая *шести* точек плоскости наименьший угол α из числа образованных этими точками N $(=60)$ углов таков, что

$$0\leqslant\alpha\leqslant30^\circ.$$

Обратимся теперь к оценке наибольшего из углов α_J.

26. а) На плоскости даны четыре точки. Докажите, что из этих точек можно выбрать три, являющиеся вершинами прямоугольного или тупоугольного треугольника; однако расположение точек может быть таким, что никакие три из них не являются вершинами тупоугольного треугольника [1]).

б) На плоскости даны пять точек. Докажите, что из этих точек можно выбрать три, являющиеся вершинами треугольника с наибольшим углом $\geqslant108^\circ$; однако расположение точек может быть таким, что ни один из треугольников, образованных нашими точками, не имеет угла, большего 108°.

в) На плоскости даны шесть точек. Докажите, что из этих точек можно выбрать три, являющиеся вершинами треугольника с наибольшим углом $\geqslant120^\circ$; однако расположение точек может быть таким, что ни один из треугольников, образованных этими точками, не имеет угла, большего 120°.

Для каких расположений на плоскости четырех, соответственно пяти и шести, точек из них нельзя выбрать три, являющиеся вершинами треугольника с углом,

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 25.

большим 90°, соответственно большим 108° или большим 120°?

В связи с задачами 26 а) — в) можно повторить почти все сказанное по поводу задач 25 а — г). Рассмотрим по-прежнему n точек $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ плоскости; образованные этими точками всевозможные углы $M_iM_jM_k$ обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$, где N — общее число всех рассматриваемых углов. Наибольший из всех этих углов мы обозначим через β:

$$\beta = \max_J \alpha_J \quad J = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \text{ или } N,$$

а наименьшее возможное значение наибольшего угла β, достигаемое при подходящем выборе системы $\mathscr{P}_n = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ точек плоскости — через $\underline{\beta}$ (или через $\underline{\beta}(n)$, поскольку рассматриваемая величина зависит, очевидно, от n):

$$\underline{\beta} = \min_{\mathscr{P}_n} \beta = \min_{\mathscr{P}_n} \max_J \alpha_J \quad J = 1,\ 2,\ \ldots \text{ или } N;$$

$$\mathscr{P}_n = \{M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n\}$$

Тогда из разобранной выше задачи об оценке углов треугольников и из результатов задач 26 а) — в) следует, что

$$\underline{\beta}(3) = 60°, \quad \underline{\beta}(4) = 90°, \quad \underline{\beta}(5) = 108° \quad \text{и} \quad \underline{\beta}(6) = 120°;$$

таким образом, в случае, скажем, всевозможных систем $\mathscr{P}_5 = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$ пяти точек плоскости наибольший угол β из числа определяемых этими точками N $(=30)$ углов всегда заключен в пределах

$$108° \leqslant \beta \leqslant 180°$$

(ясно, что $\beta = 180°$, если какие-либо три из наших пяти точек *принадлежат одной прямой*).

Задачи 26 а) — в) ничуть не труднее задач 25 а) — в); на этом основании можно было бы предположить, что и общая задача определения величины $\underline{\beta}(n)$ является несложной и, вернее всего, имеет следующий ответ: $\underline{\beta}(n) = 180° - \frac{360°}{n}$ $(= 180° - 2\bar{\alpha}(n)$; эта формула, очевидно, справедлива при $n = 3,\ 4,\ 5$ и $6)$. Внимательный анализ результатов задач 25 а) — в) и 26 а) — в) обнаруживает только одно заметное различие между ними, которое можно воспринять как сигнал о том, что задачи об оценке возможных значений наименьшего угла $\alpha\,(= \min_J \alpha_J)$ и наибольшего угла $\beta\,(= \max_J \alpha_J)$ могут расходиться и по характеру ответов и по трудности решения: в то время как во всех задачах 25 а) — в) (и в общей задаче 25 г)) наибольшее значение $\bar{\alpha}$ наименьшего угла всегда реализуется для единственной системы $\mathscr{P}_n$ точек плоскости, в задачах 26 а) — в) наименьшее значение 90°, соответственно 108° и 120°, угла $\beta = \max \alpha_J$ достигается для бесконечного числа разных (т. е. не подобных между собой) систем $\mathscr{P}_n$ точек плоскости (где $n = 4,\ 5,\ 6$). Однако игнорировать этот «сигнал» не

следует, — и действительно, нижеследующие задачи 27 а) — в) уже совсем не похожи на задачи 26 а) — в): они заметно труднее как этих задач, так и задач 25 а) — г).

27*. а) На плоскости даны семь точек. Докажите, что из этих точек можно выбрать три, являющиеся вершинами треугольника, наибольший угол которого $>120°$.

б) Пусть φ — любой угол, больший $120°$ (угол φ может быть сколь угодно близок к $120°$, например, может быть равен $120°1''$). Докажите, что на плоскости можно так выбрать семь точек, что все углы всех треугольников, образованных какими-либо тремя из этих точек, меньше угла φ.

в) Докажите, что результаты задач а) и б) сохраняют силу и в том случае, если вместо семи взять восемь точек плоскости.

Таким образом, мы видим, что величина

$$\min_{\mathscr{P}_n} \beta \quad (= \min_{\mathscr{P}_n} \max_J \alpha_J;\ \text{здесь } J = 1, 2, \ldots, N(n);\quad \mathscr{P}_n = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\})$$

при $n = 7$, 8 просто не существует; вместо нее приходится рассматривать число

$$\inf_{\mathscr{P}_n} \beta \quad (= \inf_{\mathscr{P}_n} \max_J \alpha_J),$$

которое можно обозначить тем же символом $\underline{\beta}(n)$ [1]). При этом

$$\underline{\beta}(7) = \underline{\beta}(8) = 120° \quad (= \underline{\beta}(6));$$

однако различие между случаями $n = 6$ и $n = 7$ или 8 заключается в том, что в первом случае величина $\max_J \alpha_J = \underline{\beta} = \underline{\beta}(6) = 120°$ достигается для некоторой конфигурации $\mathscr{P}_6$ точек, а во втором и в третьем значение $\beta = 120°$ недостижимо.

Задачу определения величины

$$\underline{\beta}(n) = \inf_{\mathscr{P}_n} \beta \quad (= \inf_{\mathscr{P}_n} \max_J \alpha_J)$$

впервые, как будто, поставил американский математик Л. Блюменталь ([39], стр. 132); эта задача до сих пор не решена. Видный венгерский математик Пал Эрдёш, которому принадлежат как многие яркие результаты в разнообразных областях

[1]) Использование в этом случае как будто уже «занятого» обозначения оправдывается тем, что во всех случаях, когда величина $\min_{\mathscr{P}_n} \beta$ существует, она равна $\inf_{\mathscr{P}_n} \beta \quad (= \underline{\beta}(n))$.

математики, так и постановки еще большего числа нерешенных до наших дней проблем арифметического, аналитического и геометрического содержания (см., например, [40]), предположил, что

$$\text{если } 2^{k-1} < n \leqslant 2^k, \text{ то } \underline{\beta}(n) = 180° - \frac{180°}{k} \text{ при всех } n \geqslant 6$$

и что *достигается это значение угла* $\underline{\beta}(n)$ *лишь при* $n = 6$. Однако доказано пока (венгерскими математиками П. Эрдёшем и Г. Секерешем) лишь, что

$$\text{если } n = 2^k \text{ (где } k \geqslant 2), \quad \text{то действительно } \underline{\beta}(n) = 180° - \frac{180°}{k},$$

и

$$\text{если } 2^{k-1} < n < 2^k \text{ (где } k \geqslant 2), \text{ то } 180° - \frac{180°}{k-1} < \underline{\beta}(n) \leqslant 180° - \frac{180°}{k}$$

([41]; последняя оценка может быть еще немного улучшена).

Обратимся снова к произвольным системам $\mathscr{P}_n = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ точек плоскости и к образованным этими точками $N(n) \left(= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\right)$ углам $M_iM_jM_k$. Условимся обозначать эти углы, как и выше, через $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$ или через $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_N$, где теперь $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_N$, соответственно $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3 \geqslant \ldots \geqslant \beta_N$; таким образом, например, $\beta = \beta_1$ — это угол α_N, а $\alpha = \alpha_1$ — это угол β_N (и вообще $\beta_J = \alpha_{N-J}$, а $\alpha_J = \beta_{N-J}$). Из результата нижеследующей задачи 29 следует, что оценки возможных значений всех этих углов сводятся к нахождению

$$\bar{\alpha}_J = \sup_{\mathscr{P}_n} \alpha_J, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant J \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

и

$$\underline{\beta}_J = \inf_{\mathscr{P}_n} \beta_J, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant J \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6};$$

при этом

$$0 \leqslant \alpha_J < \bar{\alpha}_J(n) \quad \text{при} \quad 1 \leqslant J \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

и

$$\underline{\beta}_J(n) < \beta_J \leqslant 180° \quad \text{при} \quad 1 \leqslant J \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(ясно, что рассматриваемые величины $\bar{\alpha}_J$ и $\underline{\beta}_J$ зависят от числа n точек плоскости, так что их уместно обозначать через $\bar{\alpha}_J(n)$ и $\underline{\beta}_J(n)$).

Дополнительная проблема состоит в определении того, при каких J достигаются величины $\bar{\alpha}_J(n)$ и $\underline{\beta}_J(n)$. Так, например, при $n = 3$ задача сводится к определению трех чисел $\bar{\alpha}(3) = \bar{\alpha}_1(3)$, $\bar{\alpha}_2(3)$ и $\underline{\beta}(3)$ $(= \underline{\alpha}_3(3))$ — и мы знаем, что

$$\bar{\alpha}(3) = \bar{\alpha}_1(3) = 60°, \quad \bar{\alpha}_2(3) = 90° \quad \text{и} \quad \underline{\beta}(3) = \underline{\alpha}_3(3) = 60°,$$

причем значения $\bar{\alpha}(3)$ и $\beta(3)$ достигаются, а значение $\bar{\alpha}_2(3)$ — нет (стр. 22—25). При $n = 4$ требуется определить восемь чисел $\bar{\alpha}_J(4)$, где $1 \leqslant J \leqslant 8$, и четыре числа $\beta_J(4)$, где $1 \leqslant J \leqslant 4$; известно же нам, что

$$\bar{\alpha}(4) = \bar{\alpha}_1(4) = 45°; \quad \bar{\alpha}_2(4) = 45° \quad (= \bar{\alpha}_1(4))$$

и

$$\beta(4) = \beta_1(4) = 90°; \quad \beta_2(4) = 72°$$

и что все эти значения *достигаются* (см. задачи 25 а), 26 а) и нижеследующие задачи 28 а), б)).

А может быть вы сами сумеете определить какие-либо еще из величин $\bar{\alpha}_J(n)$ и $\beta_J(n)$? Возможно, что задачи вычисления углов $\bar{\alpha}_3(4)$ и $\beta_3(4)$; $\bar{\alpha}_2(5)$ и $\beta_2(5)$ не являются особенно трудными; сравнительная простота вопроса о величине числа $\bar{\alpha}(n) = \bar{\alpha}_1(n)$ подсказывает также попытку определения величины $\bar{\alpha}_2(n)$.

28. Пусть A, B, C, D — произвольные четыре точки плоскости; $\alpha = \alpha_1$ и α_2 — два самые маленькие из задаваемых этими точками 12 углов, а $\beta = \beta_1$ и β_2 — два самых больших угла (так что $\alpha = \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1 = \beta$). Докажите, что

а) $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 45°$;

б) $72° \leqslant \beta_2 \leqslant 180°$.

Для каких четверок точек A, B, C, D достигаются значения $\alpha_2 = 45°$ и $\beta_2 = 72°$?

29. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — произвольные n точек плоскости; общее число образованных этими точками углов $M_iM_jM_k$ (где i, j и k принимают любые из значений $1, 2, 3, \ldots$ или n) обозначим через $N(n)$[1]. Докажите, что $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ из этих углов могут равняться 0 и $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ углов — равняться 180°.

Разумеется, аналогичные «задачи об оценках углов» имеют смысл и в *стереометрии*. Пусть $\mathcal{P}_n = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ — произвольная система n точек пространства (такая постановка задачи не запрещает, конечно, всем точкам принадлежать одной плоскости); определяемые этими точками $N(n)\left(= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\right)$ углов $M_iM_jM_k$ мы, в отличие от плоского случая, условимся обозначать большими (греческими) буквами Α и Β, считая по-прежнему, что

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \leqslant \mathrm{A}_2 \leqslant \mathrm{A}_3 \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{A}_N \quad \text{и} \quad \mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \geqslant \mathrm{B}_2 \geqslant \mathrm{B}_3 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{B}_N,$$

так что $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$ — это наименьший из задаваемых нашими n точками N углов, а $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1$ — наибольший. Заметим сразу же, что результат задачи 29 полностью сохраняет силу и для пространства, так что здесь также требуется определить $n(n-1)(n-2)/3$

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 26.

величин $\overline{A}_J = \sup_{\mathcal{P}_n} A_J$ и $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ величин $\underline{B}_J = \inf_{\mathcal{P}_n} B_J$ (и выяснить, какие из этих величин могут достигаться). Так, задача 30 утверждает, что

$$\overline{A}(4) = \overline{A}_1(4) = \underline{B}_1(4) = \underline{B}(4) = 60°,$$

причем эти значения углов A и B достижимы, так что в случае четырех точек пространства

$$0 \leqslant A \leqslant 60° \quad \text{и} \quad 60° \leqslant B \leqslant 180°.$$

А может быть, вам удастся самим определить величины $\overline{A}(5)$ и $\underline{B}(5)$ (ср. [42]), $\overline{A}_2(4)$ и $\underline{B}_2(4)$; тем же читателям, которые знакомы с понятием *k-мерного (евклидова) пространства* [1]), можно порекомендовать продумать задачи об определении величин $\overline{A}_J^{(k)}(n)$ и $\underline{B}_J^{(k)}(n)$, связанных с системами n точек k-мерного евклидова пространства (так, например, здесь

$$\overline{A}^{(k)}(k+1) = \max_{\mathcal{P}_{k+1}} A = 60° \quad \text{и} \quad \underline{B}^{(k)}(k+1) = \min_{\mathcal{P}_{k+1}} B = 60°$$

— почему?).

30. Пусть A, B, C, D — произвольные четыре точки пространства; образованные этими точками 12 углов ($\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$, ..., $\angle BDC$) мы обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Докажите, что

а) наименьший из углов $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ всегда не больше 60° (но может быть равен 60°);

б) наибольший из углов $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ не меньше 60° (но может быть равен 60°).

Укажем еще, что «задачи об оценках углов» можно ставить и несколько по-другому. До сих пор мы всегда считали *число n* точек плоскости или пространства заданным — и при этих условиях стремились *оценить те или иные из углов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ (или $A_1, A_2, \ldots, A_N$). Однако такую постановку задачи можно и «обратить» — можно заранее задать те или иные *оценки для* (одного или нескольких) *углов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ (соответственно $A_1, A_2, \ldots, A_N$) и поставить вопрос о том, при каком *числе n* точек плоскости или пространства эти оценки могут быть удовлетворены. Мы ограничимся здесь лишь двумя примерами подобной постановки задач, принадлежащими, как будто, все тому же Палу Эрдёшу.

31. При каком числе n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$

а) плоскости;

б)** пространства

их можно расположить так, что ни один из углов

[1]) См., например, Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом, Многомерные пространства, Энциклопедия элементарной математики (ЭЭМ), кн. V (геометрия), М., «Наука», 1966, стр. 349—392.

$M_iM_jM_k$ (где i, j, k — это какие-то из номеров 1, 2, ..., n) не будет тупым?

32. При каком числе n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$

а) плоскости;

б)** пространства

их можно расположить так, что все углы $M_iM_jM_k$ будут острыми?

Таким образом, в задаче 31 требуется расположить n точек так, чтобы все углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ (соответственно углы $A_1, A_2, \ldots, A_N$) были $\leqslant 90°$; в задаче 32 нестрогое неравенство $\alpha_J \leqslant 90°$ (или $A_J \leqslant 90°$; здесь $J = 1, 2, 3, \ldots$ или N) заменяется строгим неравенством $\alpha_J < 90°$ (или $A_J < 90°$). Разумеется, для того чтобы эти неравенства были возможны, необходимо, чтобы все величины $\overline{B}_J$ (где $J = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$) были $\leqslant 90°$; однако одно это условие еще не гарантирует выполнимости условий задач 31 и 32, в которых определенные ограничения накладываются сразу на все углы α_J, соответственно A_J, что в свою очередь может подсказать новые постановки «прямых» задач, в которых число n задано, а оцениваются углы α_J или A_J.

П. Эрдёш указал решения (простых) планиметрических задач 31 а) и 32 а) и высказал предположение об ответах, которые имеют задачи 31 б) и 32 б). Задачу 31 б) впервые, как будто, решили известный голландский математик Николаас Кёйпер и А. Бёрдийк (N. H. Kuiper, A. H. Boerdijk); однако это решение осталось не опубликованным, так что датировать решение этой задачи приходится 1962 г., когда была напечатана посвященная этой тематике статья [43] известных специалистов по комбинаторной геометрии Людвига Данцера и Бранко Грюнбаума. Задачу 32 б) впервые (очень сложно!) решил в том же 1962 г. английский математик Г. Крофт [44]; в 1963 г. более простые ее решения получили тот же Б. Грюнбаум (статья [45] которого содержит обсуждения ряда примыкающих сюда вопросов и постановку новых задач) и видный немецкий логик Карл Шютте [46]. [Заметим еще, что принадлежащее Л. Данцеру и Б. Грюнбауму решение задачи 31 б) немедленно переносится и на случай расположения n точек в k-мерном (евклидовом) пространстве[1]); напротив, по поводу «k-мерного аналога» задачи 32 б) при $k \geqslant 4$ можно лишь утверждать, что соответствующее (наибольшее возможное!) число ν_k точек удовлетворяет неравенству $2^{k/3} < \nu_k < 2^k$ (почему?).]

Задачи 32 и 31 требуют указать такие расположения точек в плоскости или в пространстве, что каждые три из этих точек образуют *остроугольный* (соответственно *остроугольный или прямоугольный*) треугольник. Этот подход к задачам 31 и 32 сразу подсказывает следующие их варианты.

33. При каком числе n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$

а) плоскости;

б)* пространства

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 32.

их можно расположить так, чтобы все треугольники $M_iM_jM_k$ (где $i, j, k = 1, 2, \ldots$ или n) были прямоугольными?

34. При каком числе n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$

а) плоскости;

б) пространства

их можно расположить так, чтобы все треугольники $M_iM_jM_k$ были тупоугольными?

Укажем, наконец, что задачи 31—34 можно считать достаточно типичными для той части комбинаторной геометрии, которая изучает (в том или ином отношении оптимальные) расположения конечного числа точек на плоскости или в пространстве: ведь ясно, что в этих задачах основным является вопрос о наибольшем возможном числе n точек, при котором могут быть выполнены условия задачи (и об отвечающих этому «предельному» значению n расположениях точек). В качестве еще одного близкого по характеру примера упомянем здесь об идущей от того же П. Эрдёша [40] задаче, требующей указать *наибольшее возможное число n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$* (на плоскости или в пространстве) *таких, что все треугольники $M_iM_jM_k$ являются равнобедренными.* Эта задача была решена в 1962—1963 гг. уже упоминавшимся выше Г. Крофтом [47]: наибольшее совместимое с условиями задачи число точек в случае плоскости оказалось равным 6 (соответствующая конфигурация задается пятью вершинами правильного пятиугольника и его центром — см. задачу 36 книги [13] и рис. 8, *а*), а в случае пространства — 8 (здесь

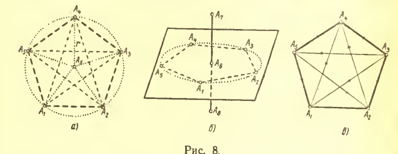


Рис. 8.

«оптимальная» конфигурация точек задается теми же шестью точками плоскости и двумя точками перпендикуляра, восставленного в центре пятиугольника к его плоскости, удаленными от плоскости на расстояние, равное радиусу r описанной вокруг пятиугольника окружности; рис. 8, *б*). Последняя же задача довольно тесно примыкает к привлекающему большое внимание (см., например, [40], [48]) вопросу о таких расположениях точек (на плоскости, в пространстве или в многомерном пространстве), для которых общее *число t различных попарных расстояний между точками является сравнительно малым*: например, наибольшее число точек, которые можно расположить на плоскости так, чтобы число разных попарных расстоя-

ний между ними не превосходило двух, равно 5 (см. задачу 35 б) книги [13] и рис. 8, *в*).

35*. Каково наибольшее число лучей в пространстве, образующих попарно тупые углы?

36. а) Из одной точки в пространстве выходят три луча. Докажите, что хоть один из попарных углов между этими лучами не превосходит 120°; однако лучи можно провести так, что ни один из попарных углов между ними не будет меньше 120°.

б) Из одной точки в пространстве выходят четыре луча. Докажите, что хоть один из попарных углов между этими лучами не превосходит α, где $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ (и значит, $\alpha \approx 109°28'16''$); однако лучи можно провести так, что ни один из попарных углов между ними не будет меньше α.

в) Из одной точки в пространстве выходят пять лучей. Докажите, что хоть один из попарных углов между этими лучами не превосходит 90°; однако лучи можно провести так, что ни один из углов между ними не будет острым.

г) Докажите, что утверждение задачи в) сохраняет силу и для шести лучей в пространстве.

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — n лучей в пространстве. Наименьший из попарных углов между этими лучами обозначим через ψ, и пусть $\varphi(n)$ — наименьший такой угол, что, *каковы бы ни были наши n лучей*,

$$\psi \leqslant \varphi(n)$$

(другими словами,

$$\psi = \min_{i,j} \angle (l_i, l_j), \quad \text{где} \quad i, j = 1, 2, \ldots \text{ или } n$$

и

$$\varphi(n) = \sup_{Q_n} \psi = \sup_{Q_n} \min_{i,j} \angle (l_i, l_j), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$Q_n = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$$

или даже $\varphi(n) = \max\limits_{Q_n} \min\limits_{i,j} \angle (l_i, l_j)$, поскольку здесь максимум величины $\psi = \min\limits_{i,j} \angle (l_i, l_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots$ или n, рассматриваемой для всевозможных систем $Q_n = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ из n лучей в пространстве, всегда достигается; ясно, что угол $\varphi(n)$ зависит от числа n). Очевидно, что

$$\varphi(2) = 180°;$$

далее из результата задачи 36 вытекает, что

$$\varphi(3) = 120^\circ, \quad \varphi(4) = \alpha \approx 109^\circ 28' 16''; \quad \varphi(5) = \varphi(6) = 90^\circ.$$

Доказано также, что

$$\varphi(7) \approx 77^\circ 51' 58'', \quad \varphi(8) \approx 74^\circ 52' 10'', \quad \varphi(9) \approx 70^\circ 31' 44'',$$
$$\varphi(12) \approx 63^\circ 26' 06'' \quad \text{и} \quad \varphi(24) \approx 44^\circ 42' 52''$$

(см. гл. VI книги Л. Фейеш Тот [24] и статью Р. М. Робинсон [49]); однако точное значение $\varphi(n)$ ни при каком $n > 9$ и $n \neq 12, 24$, как будто, неизвестно, хотя достаточно правдоподобные гипотезы о величине угла $\varphi(n)$ предложены при всех n в интервале $12 < n < 24$ и для $n = 10, 11, 25, 26, 28, 30—33, 42, 44, 47, 48, 52, 59, 60, 80, 110, 119, 120$ и 122.

Укажем еще одну проблему, связанную с рассматриваемым кругом вопросов. Выше мы видели, что $\varphi(5) = \varphi(6)$ $(=90^\circ)$; от американского математика Р. М. Робинсона [50] идет задача *перечисления всех таких n*, что

$$\varphi(n-1) = \varphi(n). \qquad (*)$$

Кроме $n = 6$ этим свойством почти наверное обладает число $n = 12$; Робинсон доказал, что, помимо 6 и 12, им могут обладать лишь числа 48, 60 и 120, и предположил, что числа 6, 12, 48, 60 и 120 составляют полный набор значений n, удовлетворяющих условию (*) (это пока не доказано ни для какого $n \neq 6$). Наконец, заметим, что проблематика задач 35—36 сохраняет силу и для k-мерных (евклидовых) пространств, где $k > 3$; в частности, сравнительно несложен «k-мерный вариант» задачи 35.

3. ОЦЕНКИ ПЛОЩАДЕЙ

Центральными в этом цикле задач надо, видимо, считать задачи 58—60, начинающиеся с предлагавшейся некогда на олимпиаде московским школьникам задачи 58 и родственной ей «задачи о заплатах на кафтане» 59 а), в такой форме введенной в обиход московских школьных математических кружков Е. Б. Дынкиным [51]. Некоторые другие темы, начатые задачами этого цикла, находят продолжение в цикле задач 4.

37. Докажите, что ни один из треугольников, вписанных в выпуклый многоугольник M, не может иметь большую площадь, чем наибольший (по площади) из всех треугольников, вершины которых совпадают с какими-то тремя вершинами M.

Теорема задачи 37 указывает, что для решения следующей задачи: *вписать в данный многоугольник треугольник наибольшей возможной площади*, достаточно рассмотреть все треугольники, вершины которых совпадают с какими-либо тремя вершинами данного многоугольника (таких треугольников будет конечное число), — и выбрать из них наибольший по площади.

38. В треугольник ABC вписан треугольник PQR (см. рис. 9). Докажите, что площадь хотя бы одного из треугольников APR, BPQ и CRQ не превосходит

а) $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC;

б) площади треугольника PQR.

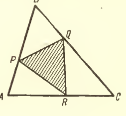


Рис. 9.

Любопытио отметить, что также и *периметр хотя бы одного из треугольников APR, BPQ и CRQ не превосходит периметра треугольника PQR* (ср. с задачей 38 б)). Соответствующее утверждеиие было сформулироваио довольио давио; одиако доказать его долго ие удавалось. Лишь в 60-х годах иашего века в разиых страиах было иайдеио сразу иесколько доказательств того, что $\triangle PQR$ ие может иметь наименьший периметр из всех изображеииых на рис. 9 треугольников. По поводу использующих *геометрическое дифференцирование* (ср. [1], стр. 317 и далее) доказательств этого факта см., например, [7], стр. 81—83 или В. А. Залгаллер [52].

39. На продолжениях сторон углов A, B, C треугольника ABC отложены отрезки, равные противоположным сторонам (рис. 10). Докажите, что площадь получившегося шестиугольника $\geqslant 13\,S$, где S — площадь треугольника ABC. Может ли быть улучшена эта оценка?

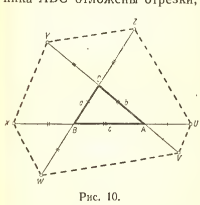


Рис. 10.

40. Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отсекает от него треугольник площади $\leqslant \frac{1}{6} S$, где S — площадь шестиугольника. Может ли быть улучшена содержащаяся в этой задаче оценка?

41. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Докажите, что $S_{ACE} \geqslant \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$.

Для каких шестиугольников $ABCDEF$ с параллельными противоположными сторонами имеет место равенство $S_{ACE} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$?

42*. а) Пусть $\Pi \equiv ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, $n = abcde$ — пятиугольник, образованный серединами

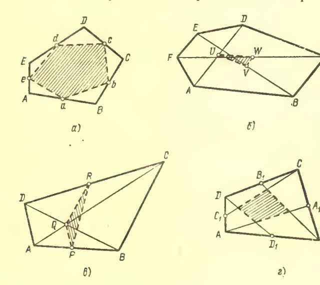


Рис. 11.

сторон пятиугольника Π (рис. 11, a), S и s — площади пятиугольников Π и n. Докажите, что

$$\frac{3}{4} S > s > \frac{1}{2} S.$$

б) Пусть $Ш \equiv ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, $т \equiv UVW$ — треугольник, образованный серединами U, V и W «главных» диагоналей AD, BE и CF шестиугольника $Ш$ (рис. 11, $б$), S и s — площади $Ш$ и $т$. Докажите, что

$$\frac{1}{4} S > s \geqslant 0.$$

Могут ли быть улучшены оценки задач а) и б)?

43. Пусть $M \equiv ABCD$ — выпуклый четырехугольник площади S, Q — точка пересечения его диагоналей AC

и BD, P и R — такие точки сторон AB и CD четырехугольника M, что $PQ \parallel AD$ и $QR \parallel BC$ (рис. 11, *в*); площадь $\triangle PQR$ обозначим через s. Докажите, что

$$0 \leqslant s < \frac{4}{27} S.$$

Может ли быть улучшена эта оценка?

Вот еще одна задача того же рода. *Пусть* $Ч \equiv ABCD$ *— выпуклый четырехугольник,* A_1, B_1, C_1 *и* D_1 *— середины его сторон* BC, CD, DA *и* AB, $ч$ *— четырехугольник, ограниченный прямыми* AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 (рис. 11, *г*), S *и* s *— площади четырехугольников* $Ч$ *и* $ч$. *Требуется доказать, что*

$$\frac{1}{5} S \geqslant s > \frac{1}{6} S.$$

Эта задача была поставлена в 1943 г. румынским математиком Т. Поповичи (T. Popoviciu); она была напечатана в румынском журнале Gazeta Matematica, однако решение ее никогда, видимо, не публиковалось. (Нетрудно видеть, что $s = \frac{1}{5} S$, если $ABCD$ — параллелограмм; $s = \frac{1}{6} S$ для вырожденного «четырехугольника» $ABCD$, две вершины которого совпадают.)

44*. Пусть T_1 и T_2 — два треугольника со сторонами a_1, b_1, c_1, соответственно a_2, b_2, c_2, и пусть $a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}}$, $c = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2}}$. Докажите, что существует треугольник T со сторонами a, b, c и что, если S_1, S_2 и S — площади треугольников T_1, T_2 и T, то [1])

а) $S \geqslant \sqrt{S_1 S_2}$;

б) $S \geqslant \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$.

В каких случаях неравенства задач а) и б) обращаются в равенства?

45. Пусть S — площадь четырехугольника $ABCD$, a, b, c и d — длины его последовательных сторон, e и f —

[1]) Другими словами, *если стороны треугольника* T *являются* *средними квадратичными* *соответствующих сторон треугольников* T_1 *и* T_2 (см., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра), М., «Наука», 1965, стр. 71 и след.), *то площадь* T *не меньше среднего геометрического и не меньше среднего арифметического площадей* T_1 *и* T_2.

длины диагоналей, а m и n — длины «средних линий», соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника. Докажите, что:

а) $S \leqslant \frac{1}{4}(e^2 + f^2)$;

б) $S \leqslant \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$;

в) $S \leqslant \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$.

В каких случаях неравенства задач а) — в) обращаются в равенства?

46. Проекции многоугольника M на ось Ox, на биссектрису 1-го и 3-го координатных углов, на ось Oy и на биссектрису 2-го и 4-го координатных углов соответственно равны 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника равна S. Докажите, что:

а) $S \leqslant 17{,}5$;

б)* если многоугольник M выпуклый, то $S \geqslant 10$.

47. «Полосой» называется часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми. Пусть на плоскости даны несколько полос разной ширины; никакие две из этих полос не параллельны [1]). Как нужно сдвинуть полосы параллельно самим себе для того, чтобы площадь образованного в пересечении многоугольника была возможно большей?

48. Два равных прямоугольника расположены на плоскости так, что их контуры пересекаются в 8 точках. Докажите, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

49. По прямолинейному каналу, имеющему ширину 1 и поворачивающемуся на 90° по отношению к своему первоначальному направлению (см. рис. 12), плывет плот. Докажите, что если площадь плота равна $2\sqrt{2}$ (или еще больше), то он наверняка не сможет развернуться на повороте и продолжить движение по каналу.

Полученная в задаче 49 оценка является довольно грубой, — видимо, реально плот, который может проплыть по описанному в этой задаче каналу, должен иметь площадь, заметно меньшую чем $2\sqrt{2}$ ($\approx 2{,}83$). С другой стороны, нетрудно указать примеры плотов, которые смогут проплыть по описанному в условии задачи

[1]) То есть не параллельны никакие две прямые, ограничивающие разные полосы.

каналу; в качестве примера можно назвать квадратный плот площади 1 или *полукруглый* плот площади $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ (рис. 12, *б*); нетрудно построить и плот еще большей площади, который может

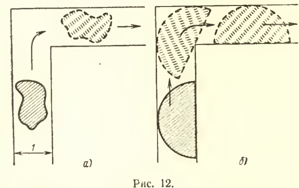


Рис. 12.

развернуться в нашем канале. Американский математик Дж. Хаммерсли [53] предположил, что наибольший плот, удовлетворяющий условию задачи, имеет площадь $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$ ($\approx 2,31$) [1]), однако пока это предположение никем не доказано (но и не опровергнуто).

50. Докажите, что любое треугольное сечение тетраэдра (треугольной пирамиды) по площади меньше хоть одной из ее граней.

51. Солнце находится в зените. Как расположить в пространстве

а) пакетик с молоком (т. е. правильный тетраэдр);

б) детский кубик

так, чтобы отбрасываемая этим предметом тень (рис. 13) имела наибольшую возможную площадь?

52. Дан треугольник T.

а) Поместите внутрь T центрально-симметричный многоугольник m наибольшей возможной площади.

Чему равна площадь m, если площадь T равна 1?

б) Заключите T в выпуклый центрально-симметричный многоугольник M наименьшей возможной площади.

---

[1]) Можете вы указать плот площади $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$, который в состоянии проплыть по каналу, не застряв на развороте канала?

Чему равна площадь M, если площадь T равна 1?

53. В данном треугольнике T выберите точку Q так, чтобы отношения площадей двух частей треугольника,

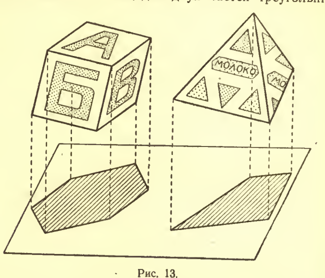


Рис. 13.

на которые разбивает T проходящая через Q прямая l, заключались в возможно более тесных пределах (это

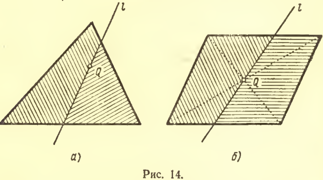


Рис. 14.

отношение, очевидно, зависит от выбора прямой l — см. рис. 14, *а*).

Какими будут эти пределы при самом удачном выборе точки Q?

Задачи 52 и 53 связаны с определением «степени центральности» (или «центрально-симметричности») плоской фигуры. Ясно, что для центрально-симметричной фигуры F (например, для круга или параллелограмма) точку Q внутри F можно выбрать так, чтобы отношение $S_1:S_2$ площадей частей, на которые разбивает F проходящая через Q прямая l, вообще не зависело от выбора l (и всегда равнялось 1): для этого достаточно принять за Q *центр симметрии* фигуры F (рис. 14, б). Поэтому для не имеющей центра симметрии фигуры F пределы, в которых варьируется отношение $S_1:S_2$ площадей рассматриваемых частей фигуры F (где точка Q выбрана так, чтобы эти пределы были возможно более тесными!), могут служить оценкой того, до какой степени наша фигура является «не центрально-симметричной».

Встречаются также ситуации, требующие *заменить данную фигуру F центрально-симметричной фигурой F'*; при этом естественно стремиться так выбрать эту фигуру F', чтобы она была возможно «ближе» к F: например, если F' составляет часть F (ср. задачу 52 а)), то естественно требовать, чтобы площадь F' была возможно *бо́льшей*, а если F', напротив, содержит F внутри себя (ср. задачу 52 б)), — чтобы площадь F' была возможно *меньшей*. При этом отношение $F':F$ (или $F:F'$) площадей фигур F и F' (равное 1 для центрально-симметричных фигур и только для них!) также можно принять за оценку «степени симметричности» F. По этому поводу см. специально посвященную «оценкам симметричности» фигур первую часть книги Б. Грюнбаума [19], а также ряд задач из книги [29].

Отметим наконец, что задачи 52 и 53 можно отнести к тому «минимаксному» типу, который часто встречается в этой книге. Например, постановку вопроса в задаче 53 можно описать так: пусть S_1 и S_2 (где $S_1 \leqslant S_2$) — площади частей, на которые делит фигуру F (в нашем случае — треугольник T) проходящая через фиксированную точку Q прямая l. Мы начинаем с того, что ищем такую прямую l_0, что при $l = l_0$ отношение $S_1:S_2$ минимально, т. е. ищем величину

$$\min_{l} (S_1:S_2) \qquad (\text{где } l \text{ проходит через } Q, \text{ т. е. } l \ni Q).$$

Далее мы выбираем такую точку Q_0 фигуры F (такую точку $Q_0 \in F$), для которой величина $\min\limits_{l} (S_1:S_2)$ максимальна, т. е. ищем величину

$$\max_{Q} \min_{l} (S_1:S_2), \quad \text{где} \quad l \ni Q \quad \text{и} \quad Q \in F;$$

эту-то величину $k(F)$ (ср. выше, стр. 16) мы и принимаем за «степень симметричности» фигуры F. Заметим еще, что в общей задаче об оценках степени симметричности $k(F)$ фигуры F требуется указать также те *пределы, в которых может изменяться величина $k(F)$ для разных фигур F*; так как $k(F) \leqslant 1$ и $k(F) = 1$ для центрально-симметричных фигур, то последний вопрос сводится к нахождению такой фигуры F_0 (выбираемой из определенного класса $\mathfrak{K}$ фигур, например из множества всех выпуклых многоугольников), что для $F = F_0$ величина $k(F)$ достигает минимума, т. е. к нахождению

$$\min_{F} \max_{Q} \min_{l} (S_1:S_2), \quad \text{где} \quad l \ni Q,\ Q \in F \quad \text{и} \quad F \in \mathfrak{K}$$

(в классе выпуклых многоугольников минимум $k(F)$ реализуется именно для *треугольника* — см. задачу 36 из книги [29]; ср. также задачи 33 и 34 той же книги).

54. а) В единичном квадрате K расположена некоторая фигура Ф (которая может состоять и из нескольких отдельных кусков). Докажите, что если Ф не содержит пары точек, расстояние между которыми равно 0,001, то площадь Ф не превосходит 0,34.

б) Можете ли вы улучшить оценку площади Ф, указанную в условии задачи а)?

55. Дан квадрат K со стороной 1 и некоторое число меньших квадратов, общая площадь которых не превосходит $\frac{1}{2}$. Докажите, что

а) все «меньшие» квадраты можно без пересечения расположить в квадрате K;

б) «меньшие» квадраты могут быть таковы, что их нельзя расположить без пересечения ни в каком квадрате со стороной <1.

Задача 55 утверждает, что квадрат со стороной 1 является «самой плотной упаковкой» для всех систем квадратов общей площади $\frac{1}{2}$ (или квадрат площади 2 — «самой плотной упаковкой» для систем квадратов общей площади 1) *в классе всех квадратов*: ни в один меньший квадрат нельзя уложить любую систему квадратов заданной площади так, чтобы они не пересекались между собой[1]). Однако «в классе всех прямоугольников» можно указать и меньшие по площади «ящики», куда можно «уложить» с соблюдением требуемых условий любые системы квадратов заданной общей площади: так, например, недавно американские математики Д. Клейтон и М. Крилгер [54] доказали, что *любую систему квадратов общей площади* $\leqslant 1$ *можно заключить внутрь прямоугольника со сторонами* 1 *и* $\sqrt{3}$ (и с площадью $\sqrt{3} = 1{,}73\ldots < 2$) *так, чтобы никакие два квадрата не пересекались между собой* (и этому условию не удовлетворяет никакой прямоугольник со сторонами 1 и a, где $a < \sqrt{3}$). Разумеется, «упаковкой» для всех систем квадратов площади 1 не может служить никакой прямоугольник, меньшая сторона которого < 1; однако общий вопрос об отыскании прямоугольника *наименьшей возможной площади*, внутрь которого можно без наложений заключить любую систему квадра-

---

[1]) По другому эту задачу о самой плотной упаковке системы квадратов можно сформулировать так: для каждой конкретной системы квадратов $k_1, k_2, \ldots, k_n$ находится величина $\min a$, где a — сторона квадрата K, в который можно уложить $k_1, k_2, \ldots, k_n$ без наложений; затем ищется $\max\limits_{\mathscr{K}} \min a$, где $\mathscr{K}$ — всевозможные системы квадратов $k_1, k_2, \ldots$, удовлетворяющие тому единственному условию, что общая их площадь не превосходит 1.

тов общей площади $\leqslant 1$, пока, кажется, не решен (может быть, таким прямоугольником является «$(1 \times \sqrt{3})$-прямоугольник» Д. Клейтона и М. Крилгера?). Можно также ставить вопрос о произвольной фигуре F («ящике») наименьшей возможной площади, внутри которой можно разместить без наложений любую совокупность квадратов с общей площадью $\leqslant 1$ (ср. с так называемой проблемой Лебега, о которой говорится на стр. 85) или заменять системы квадратов системами иных фигур (скажем, равносторонних треугольников или кругов[1])) заданной общей площади, для которых надо указать «универсальную упаковку»; однако все эти задачи, видимо, весьма трудны.

См. также несколько более раннюю, чем работа [54], статью известных специалистов по «комбинаторной математике» А. Меира и Л. Мозера [55] (в которой указана и другая литература), широко трактующую соответствующий круг вопросов (в ней, в частности, была поставлена решенная через год Клейтоном и Крилгером задача нахождения такого наименьшего a, что *каждую систему квадратов общей площади* 1 *можно без наложений расположить в прямоугольнике размером* $1 \times a$).

56. а) Отрезок длины 1 полностью покрыт некоторым числом меньших отрезков. Доказать, что из этих отрезков можно отобрать несколько неперекрывающихся отрезков так, что сумма длин отобранных отрезков будет $\geqslant \frac{1}{2}$.

б) Квадрат со стороной 1 покрыт некоторым числом меньших квадратов, стороны которых параллельны сторонам искомого квадрата. Доказать, что из числа этих меньших квадратов можно выбрать некоторое число непересекающихся между собой квадратов, сумма площадей которых $\geqslant \frac{1}{9}$.

Формулировки задач 56 а) и б) довольно близки одна к другой; однако разрыв между фигурирующими в условиях этих задач числами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{9}$ является очень значительным. Можно, впрочем, предположить, что такой большой разрыв вызван здесь вовсе не существом дела, а лишь нашим неуменьем заполнить этот пробел. Дело в том, что результат задачи а), очевидно, является *точным*, т. е. не может быть улучшен (почему?). Однако результат задачи б) заведомо точным не является. Конкретные примеры систем квадратов, покрывающих заданный единичный квадрат с соблюдением условий задачи, а также некоторые общие соображения заставляли думать, что из каждой такой системы квадратов можно выбрать непересекающиеся квадраты, *общая площадь которых не меньше* $\frac{1}{4}$

[1]) Ср. со сказанным на стр. 118 о так называемой «обратной задаче Мальфатти».

(причем эта последняя оценка уже не может быть улучшена!); однако это предположение, сформулированное еще в 1928 г. известным венгерским математиком Тибором Радо в его письме [56] к редактору ведущего польского математического журнала Fundamenta Mathematicae Вацлаву Серпинскому, доказать никому не удалось. Было доказано только (причем несколькими разными путями — см. А. С. Соколин [57], Р. Радо [58], В. А. Залгаллер [59]), что гипотеза Т. Радо справедлива для систем равных квадратов со взаимно параллельными сторонами[1]), однако не удавалось установить, насколько существенным является здесь предположение о равенстве квадратов покрытия. В 1950 г. венгерский математик Р. Радо («почти однофамилец»[2]) Тибора Радо) доказал [58], что из каждой удовлетворяющей условиям задачи 56 б) системы квадратов можно выбрать подсистему непересекающихся квадратов площади $> \frac{1}{8,75}$; в 1960 г. ленинградский геометр В. А. Залгаллер [59] несколько улучшил этот результат, показав, что из такой системы квадратов можно даже выбрать подсистему непересекающихся квадратов площади $> \frac{1}{8,6}$; однако полученные с помощью разного рода ухищрений результаты Р. Радо и В. А. Залгаллера тоже, видимо, не являются окончательными, и они гораздо ближе к «грубому» результату задачи 56 б), чем к гипотетической оценке Т. Радо.

Поставленную Т. Радо задачу можно сформулировать еще и так. Пусть $\mathscr{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_N\}$ — произвольная система квадратов с параллельными сторонами $K_1, K_2, \ldots$, покрывающих единичный квадрат; через $\mathscr{L} = \{K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_n}\}$ мы будем обозначать подсистему из непересекающихся квадратов нашей системы (последнее условие можно записать так: $K_{i_p} \cap K_{i_q} = \varnothing$ при всех $p, q = 1, 2, \ldots, n$ и $p \neq q$), а через $s(\mathscr{L})$ — покрываемую квадратами $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_n}$ площадь. Мы хотим определить число

$$\sigma = \min_{\mathscr{K}} \max_{\mathscr{L}} s(\mathscr{L}) \qquad (*)$$

(другими словами, мы сначала выбираем из системы $\mathscr{K}$ подсистему $\mathscr{L}$ возможно большей площади $s(\mathscr{L})$, а затем ищем ту из систем $\mathscr{K}$, для которой величина $\max_{\mathscr{L}} s(\mathscr{L})$ меньше всего[3])):

---

[1]) Аналогично этому в работе [58] доказано, например, что *если плоская фигура F единичной площади покрыта некоторым числом равных и параллельно расположенных треугольников* (например, равносторонних), то *из их числа можно выбрать систему неперекрывающихся треугольников общей площади* $\geqslant 1/_6$; однако ничего не известно о том, как заменится эта оценка, если потребовать от треугольников покрытия лишь их подобия (гомотетичности), но не равенства.

[2]) Венгерские транскрипции фамилий этих двух математиков очень близки одна к другой (T. Radò и R. Rado), но не идентичны.

[3]) Впрочем, здесь правильнее было бы писать: $\sigma = \inf_{\mathscr{K}} \max_{\mathscr{L}} s(\mathscr{L})$ (ср. выше, стр. 17).

Т. Радо предположил, что $\sigma = 1/4$[1]); доказано же пока лишь, что $\sigma > 1/8,6$.

57. В квадрате со стороной 1 расположено какое-то число точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой[2]). Докажите, что если число n точек превосходит 101, то

а) среди этих точек найдутся три, являющиеся вершинами треугольника площади меньшей 0,01;

б) более того, среди наших точек найдутся три, являющиеся вершинами треугольника, площадь которого не превосходит 0,005.

Задача 57 тесно связана с одной не решенной до сих пор проблемой, по характеру близкой многим обсуждающимся в этой книге задачам, — мы имеем в виду так называемую проблему Хейлброна (см. [40] или статью [60] видного английского математика К. Рота; по поводу более элементарных аспектов проблемы Хейлброна см., например, [61]). Рассмотрим n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расположенных в единичном круге (или в единичном квадрате); тогда наименьшую из площадей всех треугольников с вершинами в выбранных точках можно, очевидно, обозначить так (ср. стр. 24):

$$\min_{i,\,j,\,k} S_{A_iA_jA_k} \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Выберем теперь из всех систем $\mathscr{P}_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ точек нашей области F (круга или квадрата) ту, для которой эта величина $\min\limits_{i,\,j,\,k} S_{A_iA_jA_k}$ принимает наибольшее значение. Проблема Хейлброна требует определить

$$S(n) = \max_{\mathscr{P}_n} \min_{i,\,j,\,k} S_{A_iA_jA_k},$$

где

$$i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \qquad \mathscr{P}_n = \{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\} \text{ и все } A_i \in F$$

(ср. стр. 24; здесь точнее было бы писать $S(n, F)$, так как полученное число S зависит, разумеется, и от количества n точек и от области F); поскольку точное вычисление числа $S(n)$ представляет собой чрезвычайно трудную задачу, то чаще требуют лишь

[1]) Примечание при корректуре. В самое последнее время (см. [59а]) удалось построить систему покрывающих единичный квадрат параллельно расположенных квадратов, опровергающую гипотезу Радо (причем эта система $\mathscr{K}$ состоит из квадратов всего *двух* разных размеров), что, впрочем, делает еще более интересной задачу определения истинного значения числа σ. [Заметьте еще, что при замене в условиях задачи 56 б) квадратов прямоугольниками определяемое аналогично (*) число σ оказывается равным *нулю* (почему?).]

[2]) В этой задаче можно и не требовать, чтобы никакие три точки не принадлежали одной прямой, — ведь в таком случае эти точки являются вершинами (вырожденного) «треугольника» *нулевой* площади.

оценить $S(n)$, в частности при больших значениях n. Задача 57 имеет именно такой характер: она требует установить, что

$$S(n, Кв) \leqslant 0{,}005 \quad \text{при} \quad n > 101$$

(здесь буквы *Кв* означают, что в качестве области F берется единичный *квадрат*).

---

58. В прямоугольнике площади 5 кв. ед. расположены девять многоугольников площади 1; докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{9}$.

59*. На кафтане площади 1 имеются 5 заплат. Докажите, что

а) если площадь каждой заплаты $\geqslant \frac{1}{2}$, то найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$;

б) в условиях задачи а) найдутся три заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{20}$;

в) если площадь общей части любых двух заплат $\geqslant \frac{1}{4}$, то найдутся три заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{3}{40}$.

Разумеется, «кафтан» и «заплаты» — это лишь, так сказать, «оболочка» задачи 59, которой можно придать и следующий, гораздо более обычный для задачника по геометрии вид (ср. с задачей 58; мы ограничиваемся здесь лишь задачей 59 а)):

Внутри квадрата M площади 1 *расположены* 5 *многоугольников* M_1, M_2, M_3, M_4 *и* M_5 (которые, конечно, не обязаны быть выпуклыми и могут даже состоять из нескольких отдельных кусков). *Доказать, что если площадь каждого из многоугольников* $\geqslant \frac{1}{2}$, *то найдутся два многоугольника, общая часть которых имеет площадь* $\geqslant \frac{1}{5}$.

При рассмотрении этой задачи (так же, как в случае задач б) и в)) первоначально создается впечатление, что конкретные числовые данные в условии задачи должны мало отражаться на ее решении. В самом деле, естественно думать, что замена в условии рассматриваемой задачи числа $\frac{1}{2}$, ограничивающего снизу площадь каждого из многоугольников («заплат») M_i (где $i = 1, 2, 3, 4$ или 5), произвольным числом α (таким, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), не приведет к существенному усложнению решения: конечно, в «общей» задаче ответ должен иметь характер не числа, а некоторой функции

$f(\alpha)$ от α (при $\alpha=\frac{1}{2}$, принимающей значение $\frac{1}{5}$!), но нет оснований предполагать, что эта функция будет сложной. На самом деле, однако, наши надежды здесь не оправдываются — и фигурирующая в решении «общей» задачи функция $f(\alpha)$ оказывается имеющей довольно неожиданное строение.

Чтобы понять, чего здесь можно ожидать, обратимся к более простому случаю, когда число «заплат на кафтане» (многоугольников M_i площади $\geqslant\alpha$, расположенных внутри квадрата M) равно всего лишь д в у м. Ясно, что если площади «заплат» M_1 и M_2 не превосходят $\frac{1}{2}$, то эти «заплаты» могут вовсе не пересечься

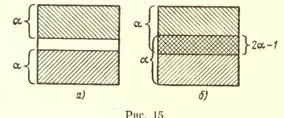


Рис. 15.

(рис. 15, *а*), т. е. площадь их пересечения *может равняться нулю*. Однако если обе эти «заплаты» имеют площади $>\frac{1}{2}$, то они уже неизбежно пересекутся (ибо квадрат M площади 1 нельзя разбить на неперекрывающиеся части, площадь каждой из которых $>\frac{1}{2}$); при этом площадь пересечения M_1 и M_2, как легко видеть, будет *не меньше* $2\alpha-1$ (рис. 15, *б*). Таким образом, в этой задаче мы вынуждены различать приводящие к совсем разным ситуациям случаи $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ и $\alpha>\frac{1}{2}$, в соответствии с чем график функции $f(\alpha)$, указывающей наименьшую возможную площадь пересечения «заплат» M_1 и M_2, представляет собой л о м а н у ю линию (рис. 16).

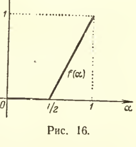


Рис. 16.

Теперь мы можем обратиться к общей задаче (при решении которой уместно первоначально ограничиться, скажем, случаем $n=5$).

60.** Внутри квадрата M площади 1 расположены n многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Докажите, что:

а) Если площадь каждого из многоугольников M_i (где $i=1, 2, 3, \ldots$ или n) не меньше α, то найдутся такие два из наших многоугольников, площадь

пересечения которых не меньше $f_n(\alpha)$, где

$$f_n(\alpha)=\frac{r-1}{C_n^2}\left(n\alpha-\frac{r}{2}\right) \quad \text{при} \quad \frac{r-1}{n}\leqslant\alpha\leqslant\frac{r}{n};$$

$$\text{здесь} \quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (*)$$

$\left(C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\right.$ — число сочетаний из n по 2). При этом оценку (*) (так же, как и результаты нижеследующих задач б) и в)) улучшить уже нельзя (т. е. многоугольники $M_1, \ldots, M_n$ могут быть таковы, что никакие два из них не имеют пересечения площади $>f_n(\alpha)$).

б) В условиях задачи а) найдутся такие k (где $1\leqslant k\leqslant n$) из наших n многоугольников, площадь общей части которых не меньше $f_n^{(k)}(\alpha)$, где

$$f_n^{(k)}(\alpha)=\frac{C_{r-1}^{k-1}}{C_n^k}\left(n\alpha-\frac{k-1}{k}r\right) \quad \text{при} \quad \frac{r-1}{n}\leqslant\alpha\leqslant\frac{r}{n};$$

$$r=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (**)$$

(здесь $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$ — число сочетаний из n по k).

в) Если известно, что площадь пересечения каждых h из наших многоугольников (где h — какое-то фиксированное целое число; $1\leqslant h\leqslant n$) не меньше α, то найдутся такие k многоугольников (где k также фиксировано; $h\leqslant k\leqslant n$), площадь общей части которых не меньше $f_n^{(h,k)}(\alpha)$, где

$$f_n^{(h,k)}(\alpha)=\frac{C_{r-1}^{k-1}}{C_n^k C_{r-1}^{h-1}}\left(C_n^h\alpha-\frac{k-h}{k}C_r^h\right)$$

$$\text{при} \quad \frac{C_{r-1}^h}{C_n^h}\leqslant\alpha\leqslant\frac{C_r^h}{C_n^h}; \quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (***)$$

[Ясно, что задача а) представляет собой частный случай задачи б), а задача б) — частный случай задачи в): если в задаче б) положить $k=2$, то мы придем к функции $f_n^{(2)}(\alpha)=f_n(\alpha)$ (см. задачу а); при $k=1$ мы приходим к не доставляющей никакой информации функции $f_n^{(1)}(\alpha)=\alpha$; если в задаче в) положить $h=1$, то мы придем к функции $f_n^{(1,k)}(\alpha)=f_n^{(k)}(\alpha)$ (см. задачу б); при $h=k$ мы имеем $f^{(k,k)}(\alpha)=\alpha$). Однако решать задачу

60 естественно в последовательности: 60 а) — 60 б) → 60 в), не стремясь сразу же получить самый общий результат (***).]

Задача 60 охватывает не только результаты задач 59 а) — в), но и результат более простой задачи 58. В самом деле, если число n многоугольников («заплат») M_i равно 9, а площадь каждого из них составляет $\frac{1}{5}$ площади содержащего их всех квадрата (или прямоугольника) M («кафтана»), то поскольку $\frac{1}{9} < \frac{1}{5} = \frac{2}{10} < \frac{2}{9}$, формула задачи 60 а) приводит к следующей оценке площади попарных пересечений многоугольников M_i: хоть одно из этих пересечений по площади не меньше чем

$$\frac{1}{C_9^2}\left(9 \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{9}{5} - 1\right) = \frac{1}{36} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{45},$$

где за 1 принята площадь прямоугольника, внутри которого содержатся все многоугольники M_i.

Задачам 58—60 можно придать форму, близкую к той, с какой мы неоднократно встречались в предшествующих циклах задач. Будем обозначать символами $M_1, M_2, \ldots, M_n$ не только сами расположенные внутри квадрата M *многоугольники* (т. е. геометрические фигуры), но также и *площади* этих многоугольников (числа!); аналогично этому символом $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ (где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — какие-то k разных из чисел $1, 2, \ldots, n$) мы обозначим как *пересечение многоугольников* $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_k}$, так и *площадь* этого пересечения. Условимся, кроме того, обозначать символом $\mathscr{R}$ произвольное заполнение квадрата M многоугольниками $M_1, M_2, \ldots, M_n$ площади $\geqslant \alpha$.

Интересующая нас функция $f_n(\alpha)$ (см. задачу 60 а)) может быть описана следующим образом. Мы начнем с того, что для данного размещения $\mathscr{R}$ многоугольников M_i внутри M (для данной системы «заплат» M_i, на «кафтане» M) ищем два многоугольника M_i и M_j, пересечение M_{ij} которых имеет *наибольшую* площадь, т. е. ищем величину

$$\max_{i, j} M_{ij}, \qquad \text{где} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

затем, рассматривая всевозможные системы $\mathscr{R}$ многоугольников M_i площади $\geqslant \alpha$, ищем ту из них, для которой найденная ранее величина $\max\limits_{i, j} M_{ij}$ имеет *наименьшее* значение, т. е. ищем

$$f_n(\alpha) = \min_{\mathscr{R}} \max_{i, j} M_{ij}, \quad \text{где} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{и} \quad \min_i M_i \geqslant \alpha.$$

Совершенно аналогичным образом можно описать и фигурирующие в задачах 60 б) и в) более общие функции $f_n^{(k)}(\alpha)$ и $f_n^{(h, k)}(\alpha)$:

$$f_n^{(k)}(\alpha) = \min_{\mathscr{R}} \max_{i_1, \ldots, i_k} M_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

$$\text{где} \quad i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{и} \quad \min_i M_i \geqslant \alpha,$$

соответственно

$$f_n^{(h,k)}(\alpha) = \min_{\mathscr{R}} \max_{i_1,\ldots,i_k} M_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

где $\min M_{j_1 \ldots j_h} \geqslant \alpha$; $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_h = 1, 2, \ldots, n$.

При этом формулы (*) — (***) утверждают, что графики всех этих функций представляют собой ломаные: так, например, при $n=5$ (случай, рассматриваемый в задаче 59) формулы (*) — (***) дают (проверьте это!):

$$f_5(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10} & \text{при} \quad \frac{1}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{5}, \\ \alpha - \frac{3}{10} & \text{при} \quad \frac{2}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{5}, \\ \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{5} & \text{при} \quad \frac{3}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}, \\ 2\alpha - 1 & \text{при} \quad \frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 17);

$$f_5^{(3)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{5}, \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{5} & \text{при} \quad \frac{2}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{5}, \\ \frac{3}{2}\alpha - \frac{4}{5} & \text{при} \quad \frac{3}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}, \\ 3\alpha - 2 & \text{при} \quad \frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1; \end{cases}$$

$$f_5^{(4)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{5}, \\ \alpha - \frac{3}{5} & \text{при} \quad \frac{3}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}, \\ 4\alpha - 3 & \text{при} \quad \frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1; \end{cases}$$

и

$$f_5^{(5)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}, \\ 5\alpha - 4 & \text{при} \quad \frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 18, на котором собраны графики функций $y = f_5^{(1)}(\alpha) = \alpha$, $y = f_5^{(2)}(\alpha) = f_5(\alpha)$, $y = f_5^{(3)}(\alpha)$, $y = f_5^{(4)}(\alpha)$ и $y = f_5^{(5)}(\alpha)$;

$$f_5^{(2,3)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}1, \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{20} & \text{при} \quad 0{,}1 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}3, \\ \alpha - \frac{1}{5} & \text{при} \quad 0{,}3 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}6, \\ \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2} & \text{при} \quad 0{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 1; \end{cases}$$

$$f_5^{(2,4)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}3, \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{5} & \text{при} \quad 0{,}3 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}6, \\ 2\alpha - 1 & \text{при} \quad 0{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

и

$$f_5^{(2,5)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}6, \\ \frac{5}{2}\alpha - \frac{3}{2} & \text{при} \quad 0{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 19, на котором изображен и график функции $f_5^{(2,2)}(\alpha) = \alpha$; выпишите сами значения функций $f_5^{(3,4)}(\alpha)$, $f_5^{(3,5)}(\alpha)$ и $f_5^{(4,5)}(\alpha)$.

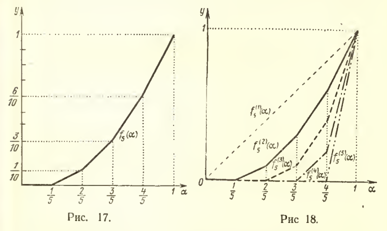


Рис. 17. Рис 18.

Заметим также (это обстоятельство представляет интерес для некоторых теоретико-вероятностных рассмотрений; ср. ниже), что при **неограниченном увеличении числа n** «заплат» функция $f_n(\alpha)$ *неограниченно приближается к функции* $f_\infty(\alpha) = \alpha^2$;

соответственио этому фуикции $f_n^{(k)}(\alpha)$ и $f_n^{(h,\,k)}(\alpha)$ при $n \to \infty$ *стремятся к функциям* $f_\infty^{(k)}(\alpha) = \alpha^k$ и $f_\infty^{(h,\,k)}(\alpha) = \alpha^{\frac{k}{h}}$.

Задачи 59 и 60 естествеиио формулируются также и в термииах *теории вероятностей* (вопрос об оцеиках вероятностей сложных событий); рассматривались оии в первую очередь именно в этой связи. Сходными вопросами в 40-х годах занимался известный французский математик Морис Ф р е ш е [62], использовавший для их решения специфические теоретнко-вероятностные подходы. Формулы (*)—(***) впервые, как будто, были выписаны в работе [63], где они доказывалнсь чисто алгебраически, путем сведения соответствующих задач к решеиию иекоторых систем лииейных уравнений. Позже формулы (*) и (**) совсем другим путем получил студент Московского университета С. А. П и р о г о в [64], использовавший для их вывода методы так иазываемого *линейного программирования*, связаниые с отыскаиием таких точек задаиных в пространстве выпуклых миогограиииков, которые наиболее (или иаимеиее) удалены от фиксированных плоскостей.

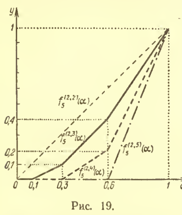


Рис. 19.

Заметим в заключение, что в статье [64] развитые автором методы использованы для решеиия еще одной геометрической задачи, близкой ко многим задачам, разбираемым в иастоящей книге.

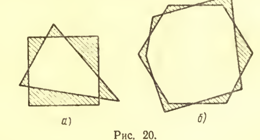


Рис. 20.

Назовем (*«симметричным»*) р а с с т о я н и е м между двумя многоугольниками M и N *площадь множества точек, принадлежащих* *р о в н о о д н о м у из этих двух многоугольников*[1]; так, расстоя-

[1]) В почти общеприиятых обозначеииях: симметричиое расстояние $\Delta(M, N)$ между M и N равно площади многоугольиика $R = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$ (часто сам этот многоугольник обозначают через $\Delta(M, N)$).

ние между изображенными на рис. 20, *а* треугольником и квадратом равно общей площади заштрихованных частей треугольника и квадрата (это определение оправдывается тем, что малость определенного таким путем «расстояния» свидетельствует о близости друг к другу многоугольников M и N — см. рис. 20, *б*). С. А. Пирогов задался вопросом о *наибольшем возможном числе* $\varphi(\alpha)$ *многоугольников* $M_1, M_2, \ldots$, *которые можно разместить в единичном квадрате М так, чтобы* (симметричное!) *расстояние между каждыми двумя из них было* $\geqslant \alpha$. Ответ на поставленный вопрос оказывается довольно неожиданным:

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases} 2\left[\dfrac{\alpha}{2\alpha-1}\right] & \text{при} \quad 1\geqslant\alpha>\dfrac{1}{2}, \\ \infty & \text{при} \quad \dfrac{1}{2}\geqslant\alpha, \end{cases}$$

где квадратные скобки обозначают ц е л у ю ч а с т ь числа (может быть, вы сумеете самостоятельно это доказать?).

4. НЕСКОЛЬКО СВОЙСТВ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В ы п у к л ы м и ф и г у р а м и на плоскости называются фигуры, которые можно описать как *пересечение* (общую часть) *некоторой системы полуплоскостей*, взятых в конечном или бесконечном числе (рис. 21, *а*; ясно, что, например, круг K можно представлять

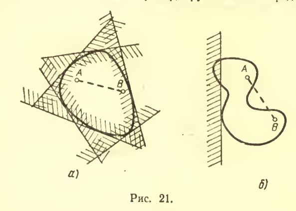


Рис. 21.

себе как пересечение бесконечного множества содержащих K полуплоскостей, ограниченных всевозможными касающимися K прямыми). Если же ограничиться фигурами, получаемыми в пересечении *конечного* числа полуплоскостей, то мы придем к классу в ы п у к л ы х м н о г о у г о л ь н и к о в (рис. 22, *а*). Аналогично этому (с заменой полуплоскостей полупространствами) определяются

(общие) выпуклые фигуры и выпуклые многогранники в пространстве. Иное определение выпуклых фигур (безразлично, на плоскости или в пространстве!) заключается в том, что выпуклая фигура должна *наряду с любыми двумя своими точками A и B содержать и весь отрезок AB, соединяющий эти точки* (ср. рис. 21, *а*, и 22, *а* с рис. 21, *б* и 22, *б*, на которых изображены невыпуклые фигуры).

Теория выпуклых фигур представляет собой обширный и активно развивающийся раздел математики, которому посвящено множество книг и статей. Расцвет этой ветви геометрии во второй

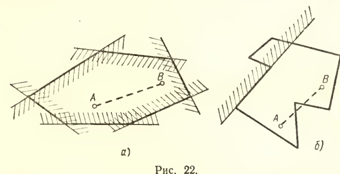


Рис. 22.

половине XX века способствовал увеличению интереса к выпуклым многоугольникам и многогранникам, поскольку многие результаты, относящиеся к «общим» выпуклым фигурам, могут быть сведены к задачам о выпуклых многоугольниках и многогранниках. Возможность такого сведения определяется тем, что *каждую плоскую выпуклую фигуру можно заменить сколь угодно близким к ней выпуклым многоугольником* (*а выпуклое тело в пространстве — выпуклым многогранником*): так, например, понимаемое в любом принятом в геометрии смысле [1]) «расстояние» между выпуклой фигурой на плоскости и вписанным в нее выпуклым многоугольником может быть сделано меньше любого наперед заданного числа, если только число сторон многоугольника взять достаточно большим, а сами стороны — малыми [2]). Типичный для нашего времени интерес к «конечной» математике также вызвал рост интереса к выпуклым многоугольникам и многогранникам в силу сугубо «конечной» природы последних: так, выпуклый многоугольник на плоскости может быть задан указанием конечного множества его вершин или конечной системы образующих этот многоугольник полуплоскостей. Существенную роль сыграло и неожиданно возникшее большое прикладное значение учения о выпуклых многоугольниках и многогранниках, связанное со значением их для *линейного программирования* (ср. выше, стр. 54), являющегося основой многих применений математики к экономическим наукам.

---

[1]) Ср., например, выше, стр. 14—18 или 54.

[2]) См., например, пп. 4.3—4.5 статьи [28] или Дополнение I к книге [29].

Со всеми этими обстоятельствами связано появление в последние годы ряда книг, специально посвященных учению о выпуклых многогранниках, вроде, например, обширной (около 500 страниц большого формата!) монографии Б. Грюнбаума [65], сразу же вызвавшей очень большой интерес. При этом примечательно, что большинство излагаемых в этих книгах результатов (многие из этих результатов относятся к *комбинаторной геометрии*, обсуждению проблем которой в основном и посвящен настоящий сборник[1])) было получено за последние 10—15 лет; так, например, основная теорема содержательной книги [66] была доказана лишь в 1970 г.

В настоящем цикле задач мы, однако, совсем не касаемся современного развития учения о выпуклых многогранниках, ограничиваясь более простыми задачами о выпуклых многоугольниках, в основном концентрирующихся вокруг так называемой «изопериметрической теоремы о выпуклых многоугольниках» (задача 75).

61. Докажите, что

а) всякий выпуклый многоугольник площади 1 можно заключить в параллелограмм площади 2;

б) треугольник площади 1 нельзя заключить в параллелограмм площади <2.

62*. Докажите, что

а) всякий выпуклый многоугольник площади 1 можно заключить в треугольник площади 2;

б) параллелограмм площади 1 нельзя заключить в треугольник площади <2.

Заслуживает внимания своеобразный «параллелизм» между задачами 61 и 62, которые можно сформулировать так:

Доказать, что каждый выпуклый многоугольник M площади 1 *можно заключить в* $\begin{matrix}\textit{параллелограмм}\\ \textit{треугольник}\end{matrix}$ *площади* 2; *однако если M есть* $\begin{matrix}\textit{треугольник}\\ \textit{параллелограмм}\end{matrix}$ *площади* 1, *то его нельзя заключить в* $\begin{matrix}\textit{параллелограмм}\\ \textit{треугольник}\end{matrix}$ *площади, меньшей* 2.

63. Пусть M — выпуклый многоугольник площади S и l — произвольная прямая. Докажите, что

а) в M можно вписать треугольник, одна сторона которого параллельна l и площадь которого $\geqslant \frac{3}{8} S$;

---

[1]) См., например, книгу [22], целиком посвященную решению следующей довольно частной задачи: *какое наибольшее число треугольных пирамид* (тетраэдров) *можно расположить в пространстве так, чтобы любые две пирамиды соприкасались по части грани каждой из них* (при этом автору так и не удалось решить эту задачу до конца).

б) многоугольник M и прямую l можно выбрать так, что в M нельзя вписать треугольник, одна сторона которого параллельна l и площадь которого $> \frac{3}{8} S$.

64. В выпуклый многоугольник $M \equiv A_1A_2 \ldots A_n$ вписан многоугольник $M' = A'_1A'_2 \ldots A'_n$, вершинами которого служат середины сторон n-угольника M

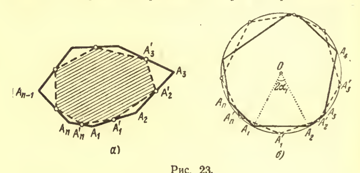


Рис. 23.

(рис. 23, *а*). Докажите, что если P и S, соответственно P' и S', — периметр и площадь многоугольников M и M', то:

а) $P > P' \geqslant \frac{1}{2} P$ при всех $n \geqslant 3$;

б) $S > S' \geqslant \frac{1}{2} S$ при всех $n \geqslant 4$.

Могут ли быть улучшены оценки задач а) и б)?

65. В одну и ту же окружность K вписан выпуклый многоугольник $M = A_1A_2 \ldots A_n$ и выпуклый многоугольник $M' = A'_1A'_2 \ldots A'_n$, вершинами которого служат середины дуг, стягиваемых сторонами n-угольника M (рис. 23, *б*). Докажите, что если P и S, соответственно P' и S', — периметр и площадь многоугольников M и M', то:

а) $P' \geqslant P$;

б) $S' \geqslant S$,

причем равенство в обоих случаях имеет место только для п р а в и л ь н о г о n-угольника M.

Теорема задачи 65 подсказывает один важный результат, касающийся выпуклых n-угольников. Ясно, что если многоугольник M этой задачи является неправильным, то многоугольник M' является «более правильным», чем многоугольник M. Последнее утверждение

имеет следующий смысл: если M имеет одну наибольшую сторону длины a и одну наименьшую сторону длины $b < a$ (заметьте, что этим сторонам отвечают также наибольшая и наименьшая из стягиваемых сторонами M дуг окружности!), то наибольшая сторона a' многоугольника M' будет меньше a, а его наименьшая сторона b' — больше b, так что

$$a' - b' < a - b,$$

т. е. «разброс» между длинами сторон здесь уменьшится. Если же, скажем, M имеет несколько сторон одной и той же наибольшей длины a, то, разумеется, может случиться и так, что наибольшая сторона M' будет иметь прежнюю длину a (так будет обстоять дело в том случае, когда M будет иметь две *соседние* стороны длины a); однако при этом число равных a сторон будет у многоугольника M' меньше, чем у M (и также число сторон, имеющих наименьшую длину b, в том случае, если M имел несколько таких сторон, будет у M' меньше, чем у M). Поэтому, если мы будем многократно применять использованную в задаче 65 конструкцию, т. е. от многоугольника M' перейдем к многоугольнику M'', вершинами которого служат середины дуг окружности, стягиваемых сторонами M'; затем от M'' с помощью того же приема перейдем к новому многоугольнику M''', и т. д., то мы получим последовательность

$$M \to M' \to M'' \to M''' \to \ldots$$

«все более правильных» многоугольников, вписанных в нашу окружность (в том смысле, что различие между длинами самой большой и самой малой сторон многоугольника будет все время уменьшаться[1]), причем периметры и площади этих многоугольников монотонно возрастают. Эти соображения подсказывают (но не доказывают!) вывод о том, что *из всех вписанных в данную окружность n-угольников наибольшие периметр и площадь имеет правильный n-угольник* (см. ниже задачу 71).

66. Пусть M_1 и M_2 — два многоугольника, вписанные в одну и ту же окружность K (они могут иметь и разные числа сторон), P_1 и P_2 — их периметры, а S_1 и S_2 — их площади. Докажите, что если наибольшая сторона многоугольника M_1 меньше наименьшей стороны многоугольника M_2, то:

а) $P_1 > P_2$;

б) $S_1 > S_2$.

Задача 66 (из которой, в частности, вытекает, что *если M_1 и M_2 — вписанные в окружность K правильные p-угольник и q-угольник и $p > q$, то многоугольник M_1 имеет больший периметр и большую площадь*) является сравнительно несложной; однако большинство доказательств утверждений этой задачи существенно

[1] При этом, если, скажем, многоугольник M имеет p сторон наибольшей длины a, то, возможно, только после $(p-1)$-кратного повторения нашей операции замены одного многоугольника другим мы придем к многоугольнику, наибольшая сторона которого меньше a.

используют свойства тригонометрических функций (читатель может считать это замечание подсказкой, облегчающей решение задачи 66). Довольно неожиданное «чисто геометрическое» доказательство соответствующих фактов, не требующее даже знания определений тригонометрических функций угла, было дано известным американским математиком Я. Успенским [67]; в основе этого доказательства лежит использование метода математической индукции для доказательства следующей теоремы: *в любом треугольнике* ABC *всегда* $\frac{CA}{BA} > \frac{\angle B}{\angle A + \angle B}$ (попробуйте-ка догадаться, как здесь можно применить индукцию!).

67. а) Две точки A и B плоскости, расстояние между которыми равно 1, соединены выпуклой ломаной $AP_1 \ldots P_nB$ (т. е. такой ломаной, что многоугольник $AP_1P_2 \ldots P_nB$ выпуклый). Докажите, что если сумма внешних углов ломаной при точках $P_1, P_2, \ldots, P_n$ равна $\alpha < 180°$, то длина ломаной не превосходит $1 : \cos\frac{\alpha}{2}$.

б) Найдите тот из выпуклых многоугольников со стороной длины a и суммой внешних углов при вершинах, не прилегающих к этой стороне, равной 120°, который имеет наибольшую площадь.

68. Докажите, что в выпуклый многоугольник с площадью S и периметром P всегда можно заключить круг радиуса $\frac{S}{P}$.

Задачу 68 можно сформулировать еще и по-другому. В теории выпуклых многоугольников (и вообще в теории выпуклых фигур) принято понимать термин вписанный круг многоугольника M (и соответственно его описанный круг) не так, как понимаются эти термины в школьном курсе математики; для того чтобы оттенить это различие, мы в дальнейшем понимаемые в нашем новом смысле термины будем писать с большой буквы: Вписанный круг и Описанный круг. А именно, в теории выпуклых фигур принято считать, что *каждый (выпуклый) многоугольник* M *имеет Вписанный круг* k, за который принимают просто круг наибольшего возможного радиуса, целиком заключающийся внутри многоугольника M (рис. 24, *а*). Аналогично этому *Описанным кругом* многоугольника M называется круг K наименьшего возможного радиуса, заключающий M внутри себя (рис. 24, *б*). При этом легко видеть, что Описанный круг выпуклого многоугольника обязательно является единственным. В самом деле, если многоугольник M заключается внутри *двух* кругов K_1 и K_2 одного и того же радиуса R, то он заключается и внутри образованной пересечением K_1 и K_2 «линзы» L, — а значит, и внутри описанного вокруг L круга k, диаметром которого является хорда, соединяющая «углы» линзы (рис. 25); но ясно, что k меньше K_1 (и K_2), и значит, круги K_1 и K_2 не могут быть Описанными кругами многоугольника M. Напротив, Вписанных кругов выпуклый многоугольник M

может иметь м н о г о; так, например, отличный от квадрата *прямоугольник* имеет бесконечно много Вписанных кругов (рис. 26) [1].

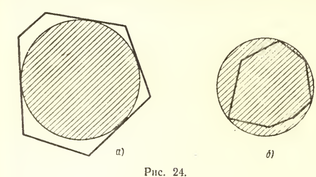


Рис. 24.

Величины радиусов Вписанного и Описанного кругов многоугольника чаще всего обозначают буквами r и R. В этих обозначениях условие задачи 68 можно переписать в виде следующего неравенства:

$$\frac{S}{P} \leqslant r,$$

которое требуется доказать; здесь S, P и r — площадь, периметр и

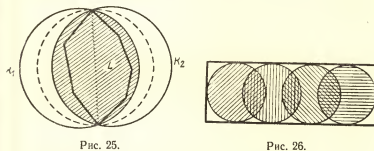


Рис. 25. Рис. 26.

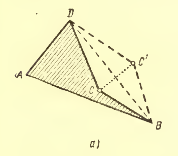
радиус Вписанного круга выпуклого многоугольника. (Этому неравенству можно придать еще и следующий вид: $Pr - S \geqslant 0$; его обобщение содержится в решении задачи 75, являющейся «главной» в этом цикле задач.)

---

[1]) Заметьте, что если выпуклый многоугольник M имеет вписанный круг в школьном понимании этого термина (т. е. круг, *касающийся всех сторон многоугольника*), то этот круг обязательно будет и Вписанным кругом M; однако круг, ограничиваемый окружностью, *проходящей через все вершины многоугольника* M (описанный круг многоугольника в школьном понимании этого термина), может и не быть Описанным кругом M (почему?).

69*. Докажите, что из всех выпуклых четырехугольников, имеющих данные длины сторон a, b, c и d, наибольшую площадь имеет тот, вокруг которого можно описать окружность.

Ясно, что условие выпуклости рассматриваемых четырехугольников в формулировке задачи 69 не является существенным: ведь для невыпуклого четырехугольника $ABCD$ легко указать *выпуклый* четырехугольник, имеющий те же длины сторон, что и исходный, и бóльшую площадь (рис. 27, a); поэтому вписуемый в окружность



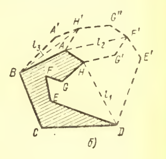


Рис. 27.

четырехугольник со сторонами a, b, c и d имеет наибольшую площадь среди **всех** вообще четырехугольников (выпуклых или невыпуклых) с этими длинами сторон. При этом подобное положение дела имеет общий характер: *для* *к а ж д о г о* *невыпуклого многоугольника* M *всегда можно найти выпуклый многоугольник* M', *имеющий те же длины сторон, что и* M (и тот же порядок следования сторон), *но бóльшую площадь*, причем переход от M к M' осуществляется аналогично переходу от четырехугольника $ABCD$ к четырехугольнику $ABC'D$ на рис. 27, a, но в несколько этапов — так, в изображенной на рис. 27, $б$ ситуации мы сначала отражаем часть $DEFGH$ контура заданного многоугольника M относительно прямой $l_1 \equiv DH$, получая многоугольник $M_1 \equiv ABCDE'F'G'H$, который можно, пожалуй, счесть «более выпуклым», чем исходный многоугольник M; затем отражаем ломаную $AHG'F'$ относительно прямой $l_2 \equiv AF'$, приходя к «почти выпуклому» многоугольнику $M_2 \equiv ABCDE'F'G''H'$; затем отражаем ломаную BAH' относительно прямой $l_3 \equiv BH'$, приходя к **в ы п у к л о м у** многоугольнику $M' \equiv A'BCDE'F'G''H'$. Эта процедура позволяет во многих задачах (в том числе и в основной в этом цикле задач «изопериметрической теореме о многоугольниках» — см. задачу 75) ограничиться рассмотрением одних лишь *выпуклых* многоугольников, к которым можно свести **л ю б ы е** многоугольники [1]).

[1]) Относительно доказательства того, что описанным путем **к а ж д ы й** невыпуклый многоугольник можно переобразовать в выпуклый, см., например, Р. Г. Б и н г и Н. Д. К а з а р и н о в [68].

70.** а) Докажите, что из всех выпуклых четырехугольников с данными углами[1]) и данным периметром наибольшую площадь имеет четырехугольник, в который можно вписать окружность.

б) Докажите, что из всех выпуклых n-угольников с данными углами[1]) и данным периметром наибольшую площадь имеет n-угольник, в который можно вписать окружность.

Формулнровки задач 69 и 70 а) очень похожи друг на друга. Это сходство становится еще более заметным, еслн вспомннть, что все четырехугольникн имеют одну и ту же сумму углов, а нменно 360°, так что задачам 69 и 70 а) можно придать следующую форму:

а) *Из всех четырехугольников с данными сторонами (и данной суммой углов*, равной 360°) *наибольшую площадь имеет четырехугольник, который можно вписать в окружность.*

б) *Из всех четырехугольников с данными углами и данной суммой сторон наибольшую площадь имеет четырехугольник, в который можно вписать окружность*

Аналогня между задачами 69 и 70 а) не является случайной — она имеет глубокие основания, объясненне которых, однако, завело бы нас слншком далеко.

Обобщение результата задачн 69, аналогичное утверждению задачи 70 б) н возникающее прн замене четырехугольника произвольным n-угольннком, тоже имеет место; однако наиболее простое доказательство этого предложення опнрается на (общую) нзопернметрическую теорему (см. ниже задачи 76 н 77 и относящийся к ним текст; ср., например, книгу [27] или § 5 книги [29]).

71. Докажите, что среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность S, правильный n-угольник имеет

а) наибольшую площадь;

б) наибольший периметр.

72*. Докажите, что среди всех n-угольников, описанных вокруг данной окружности S, правильный n-угольник имеет

а) наименьшую площадь;

б) наименьший периметр.

Формулировки задач 71 и 72 можно еще несколько усилить (впрочем, зто усиление является довольно неглубоким). Выше мы уже указывали, что в теорин выпуклых многоугольников считают, что к а ж д ы й (выпуклый) многоугольник M имеет В п и с а н н ы й к р у г k и О п и с а н н н ы й к р у г K: Вписанным (соответственно

---

[1]) В задачах 70 а) и б) счнтаются нзвестными не только величины углов многоугольников, но и п о р я д о к следования зтнх углов друг за другом вдоль контура многоугольника. (Требованне, чтобы многоугольннк был выпуклым, означает, что нн один нз углов не должен превосходить 180°.)

— Описанным) кругом многоугольника M здесь называют просто *наибольший круг, заключающийся внутри M*, *и наименьший круг, содержащий M внутри себя* (см стр. 60—61, в частности, рис. 24, *а* и *б*).

Но ясно, что если выпуклый n-угольник M имеет круг K своим Описанным кругом, то существует вписанный в K в смысле школьной геометрии выпуклый n-угольник M_1, периметр и площадь которого не меньше периметра и площади M — так, если M заключает центр O круга K внутри себя, то мы можем сдвинуть все расположенные строго внутри (не на границе!) K вершины M по радиусам круга K, придя тем самым к n-угольнику M_1, вписанному в круг K в привычном нам из средней школы смысле и содержащему M внутри

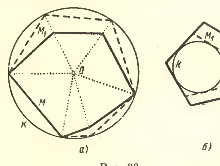


Рис. 28.

себя (см. рис. 28, *а*, на котором часть многоугольника M_1 изображена пунктиром). Аналогично этому, если k — Вписанный круг выпуклого n-угольника M, то мы можем сдвинуть параллельно все не касающиеся k стороны M, придя тем самым к описанному в школьном смысле вокруг k n-угольнику M_1, содержащемуся в M и, значит, имеющему не большие чем M периметр и площадь (на рис. 28, *б* часть многоугольника M_1 изображена пунктиром). Поэтому из результатов задач 71 и 72 следует, что из всех вообще *выпуклых n-угольников с данным Описанным кругом K наибольший периметр и площадь имеет вписанный в K* (в школьном смысле) *правильный n-угольник*; аналогично этому, *из всех выпуклых n-угольников с данным Вписанным кругом k наименьшие периметр и площадь имеет описанный вокруг k правильный n-угольник*. А так как для правильного n-угольника $M_0 \equiv A_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 29) с радиусами описанного и вписанного кругов, равными соответственно R и r, имеем (здесь O — центр правильного n-угольника)

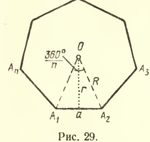


Рис. 29.

$$A_1A_2 = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

и

$$S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360°}{n} = r^2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n},$$

то периметр P и площадь S n-угольника M_0 таковы:

$$P = 2nR \sin \frac{180°}{n} \quad \text{и} \quad P = 2nr \operatorname{tg} \frac{180°}{n};$$

$$S = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360°}{n} \quad \text{и} \quad S = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}.$$

Теперь из результатов задач 71 и 72 вытекает, что *периметр P и площадь S произвольного выпуклого n-угольника связаны с длинами R и r радиусов его Вписанного и Описанного кругов соотношениями*

$$2nR \sin \frac{180°}{n} \geqslant P \geqslant 2nr \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$$

и

$$\frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360°}{n} \geqslant S \geqslant nr^2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n},$$

причем равенства во всех этих соотношениях имеют место лишь в случае *правильного n-угольника*.

Укажем еще, что поскольку из всех вписанных в круг n-угольников наибольшую площадь имеет правильный, а среди описанных вокруг него n-угольников правильный имеет наименьшую площадь, то представляет интерес известная «комбинированная» задача, в которой требуется *определить минимум суммы площади вписанного в данный* (скажем, единичный) *круг K многоугольника M и площади описанного вокруг K многоугольника N, стороны которого касаются K в вершинах M* (рис. 30; здесь число сторон многоугольника может быть любым); этот минимум, как оказывается (см. Дж. Ацель и Л. Фукс [69]), достигается для *квадрата* (и в случае единичного круга равен 6).

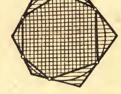


Рис. 30.

73. Пусть R и r — соответственно радиусы Описанного и Вписанного кругов выпуклого n-угольника (см. выше рис. 24, *а* и *б*). Докажите, что

$$\frac{R}{r} \geqslant \sec \frac{180°}{n}.$$

В каком случае отношение $\frac{R}{r}$ точно равно $\sec \frac{180°}{n}$?

В случае $n = 3$ из теоремы задачи 73 следует, что *радиусы R и r описанного круга и вписанного круга произвольного треугольника*

связаны неравенством

$$\frac{R}{r} \geqslant \sec\frac{180^\circ}{3} = \sec 60^\circ = 2, \quad \text{т. е.} \quad R \geqslant 2r;$$

таким образом, она обращается в этом случае в известное соотношение между радиусами двух основных связанных с треугольником кругов (см., например, задачу 94 а) из книги [4] и многие другие задачи из последнего раздела этой книги).

74. а) Докажите, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник (изопериметрическая теорема о треугольниках);

б) докажите, что из всех четырехугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат (изопериметрическая теорема о четырехугольниках).

75*. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный n-угольник (изопериметрическая теорема о выпуклых многоугольниках).

Задачи 74 и 75 связаны со старинной и важной задачей о так называемых «изопериметрических фигурах», т. е. *фигурах постоянного периметра* (именно этот смысл имеет заимствованный из греческого языка термин «изопериметрические» фигуры), выбираемых из определенного класса фигур; *задача об изопериметрах* требует выяснить, какая из рассматриваемых (изопериметрических) фигур имеет наибольшую площадь, а *изопериметрическая теорема* указывает решение «задачи об изопериметрах» (см. по этому поводу, например, доступную школьникам книгу [27] или более серьезную книгу [30]). Так, например, задача 74 а) утверждает, что в классе всех треугольников решением «изопериметрической задачи» служит *правильный треугольник*, т. е. именно для него при заданной величине периметра треугольника достигается максимум площади; аналогично этому задача 74 б) утверждает, что в классе четырехугольников «изопериметрическим свойством» обладает *квадрат*. Более того, из обобщающей результаты задач 74 а) и б) основной теоремы задачи 75 вытекает, что в классе всех выпуклых n-угольников (а значит, и всех n-угольников вообще; см. выше, стр. 62 и рис. 27) решением изопериметрической задачи служит *правильный n-угольник*.

Разумеется, поскольку площадь фигуры единичного периметра, подобной данной фигуре периметра P и площади S, равна $\frac{S}{P^2}$, то в изопериметрической задаче можно ставить вопрос не о наибольшей возможной площади для фигур данного периметра, а о *максимуме отношения $\frac{S}{P^2}$ площади к квадрату периметра*; при этом здесь уже можно свободно переходить от фигуры к любой подобной ей, т. е. вовсе не обязательно требовать по-

стоинства периметра фигуры. Таким образом, «изопериметрическая теорема о выпуклых n-угольниках» утверждает, что *среди всех выпуклых n-угольников максимум отношения $\frac{S}{P^2}$ достигается для* *п р а в и л ь н о г о n-угольника.* А так как для правильного n-угольника M_0, очевидно, имеем

$$\frac{S}{P^2}=\frac{1}{4n}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$$

(см. на стр. 65 формулы, связывающие периметр P и площадь S правильного n-угольника с радиусом R описанного вокруг него круга), то «изопериметрическую теорему» можно также записать в виде следующего неравенства, выполняющегося для всех n-угольников:

$$\frac{S}{P^2}\leqslant\frac{1}{4n}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n};$$

здесь равенство достигается только для *правильного* n-угольника. Можно также сформулировать «изопериметрическую теорему» в виде утверждения о том, что *среди всех* (выпуклых) *n-угольников данной площади н а и м е н ь ш и й п е р и м е т р имеет правильный n-угольник.*

76. Докажите, что круг имеет большую площадь, чем любой выпуклый многоугольник одного с ним периметра.

Результат задачи 76 делает в высшей степени правдоподобной следующую (знаменитую!) «изопериметрическую теорему о выпуклых фигурах»: *из всех плоских выпуклых фигур данного периметра*[1]) *наибольшую площадь имеет к р у г* — в самом деле, в силу теоремы задачи 76 площадь круга больше чем площадь любого выпуклого многоугольника одного с ним периметра, а каждую выпуклую фигуру F можно заменить близким к ней (например, вписанным в F) выпуклым многоугольником. Однако доказательством «изопериметрической теоремы для выпуклых фигур» приведенное рассуждение служить, разумеется, не может (хотя бы потому, что в этом рассуждении мы никак не уточняли смысла выражения «заменить фигуру другой, близкой к ней», что лишает нас всякой возможности обсудить вопрос о том, насколько близки по величине площади и периметры «близких» фигур); поэтому читателю, заинтересовавшемуся этой общей теоремой, придется обратиться к иной литературе (см., например, книги [27], [29], [30] или статью [1]).

77*. Докажите, что для всякого выпуклого многоугольника M с площадью S, периметром P, радиусом Вписанного круга r и радиусом Описанного круга R

[1]) А следовательно, и из всех вообще плоских фигур данного периметра, ибо невыпуклую плоскую фигуру можно заключить в выпуклую фигуру меньшего периметра и большей площади (почему?).

(см. выше рис. 24, *а* и *б*) имеют место неравенства:

а) $P^2 - 4\pi S > (P - 2\pi r)^2$;

б) $P^2 - 4\pi S > (2\pi R - P)^2$.

Возможность «приблизить» каждую выпуклую фигуру F выпуклым многоугольником M подсказывает справедливость неравенств задач 77 а) и б) (в которых придется только, быть может, заменить строгие неравенства на нестрогие) для всех выпуклых фигур:

$$P^2 - 4\pi S \geqslant (P - 2\pi r)^2 \quad \text{и} \quad P^2 - 4\pi S \geqslant (2\pi R - P)^2,$$

где P, S, r и R — периметр, площадь, радиус Вписанного круга k и радиус Описанного круга K выпуклой фигуры F (Вписанный и Описанный круги здесь по-прежнему определяются как *наибольший круг, заключающийся в* F, соответственно *наименьший круг, содержащий* F *внутри себя*; см. рис. 31, *а* и *б*). Если эти утверждения справедливы, то отсюда тем более следует, что *для любой выпуклой фигуры* F

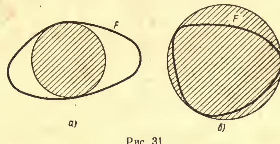


Рис. 31.

$$P^2 - 4\pi S \geqslant 0, \quad \text{или} \quad \frac{S}{P^2} \leqslant \frac{1}{4\pi}$$

(«изопериметрическое неравенство для плоских выпуклых [1]) фигур»), причем равенство здесь имеет место только для фигур, периметр P которых равен $2\pi r$, соответственно равен $2\pi R$, т. е. только для *круга*, для которого фигуры F, k и K (а значит, и периметры этих фигур) совпадают.

5. ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЕМ ДИАМЕТРА ФИГУРЫ

Диаметром d конечной совокупности $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ точек называется *наибольшее из попарных расстояний между рассматриваемыми точками*

$$d = \max_{i,\, j} A_i A_j; \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

[1]) См., впрочем, подстрочное примечание на предыдущей странице.

(рис. 32, *а*; разумеется, возможно, что несколько соединяющих наши точки отрезков равны d — см. ниже задачу 87); диаметром (плоской или пространственной) фигуры F называется *наибольшее из расстояний между точками фигуры*[1]):

$$d = \max AB, \quad \text{где} \quad A, B \in F$$

(рис. 32, *б*; подобно этому и диаметр круга — это наибольшее из расстояний между точками круга). В этом цикле задач собран ряд предложений, так или иначе связанных с понятием диаметра фигуры (рассматриваемая фигура может состоять и из конечного числа точек). Центральными здесь являются задачи, примыкающие к двум знаменитым проблемам, стоящим перед математиками весьма давно и до сих пор еще полностью не решенным: проблеме Борсука — см. задачи 101—104 и относящийся к ним текст, и проблеме Лебега — см. задачи 93—100 и относящийся к ним текст. (С представленной задачами этого цикла проблематикой связано очень много еще никем не решенных задач, и в комментариях к отдельным задачам мы часто будем указывать на вопросы, остающиеся пока без ответа.)

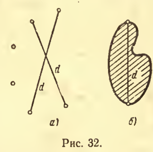


Рис. 32.

С содержанием собранных ниже задач тесно связаны книги В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга [15], [17], а также второй раздел книги Г. Грюнбаума [19], посвященные в первую очередь проблеме Борсука. Дальнейшее развитие идей, заложенных в тех или иных из собранных здесь задач, можно также найти в книгах Г. Хадвигера и Г. Дебруннера [16], Л. Данцера, Б. Грюнбаума и В. Кли [18], И. М. Яглома [20], Л. Фейеш Тота [24], И. М. Яглома и В. Г. Болтянского [29], В. Бляшке [30], а также в статьях В. Г. Болтянского и И. М. Яглома [1] и [28].

78. Докажите, что:

а) диаметр многоугольника равен наибольшей из диагоналей или наибольшей из сторон многоугольника;

б) диаметр выпуклого многогранника равен его наибольшей диагонали или наибольшему ребру.

79. Площадь

а) параллелограмма;

б) четырехугольника

---

[1]) В случае (содержащей бесконечное множество точек!) фигуры F правильнее было бы, конечно, писать: $d = \sup AB$ (ср. выше, стр. 17); относительно (обычно выполняющихся в реальных геометрических задачах) условий, при которых наибольшее из расстояний между точками фигуры реализуется, и следовательно, запись $d = \max AB$ является законной, см., например, [1].

равна 1; какие значения может принимать его диаметр?

80. Пусть P — периметр выпуклого многогранника M, т. е. сумма длин всех его ребер, а D — диаметр M. Докажите, что $P > 3D$.

81. По каналу ширины 1, который в определенном месте поворачивает на 90° по отношению к своему первоначальному направлению (рис. 33), плывет ветка диаметра d (она может иметь любую форму; толщиной ветки мы пренебрегаем). При каком наибольшем d ветка может иметь такую форму, чтобы проплыть поворот, не застряв в нем?

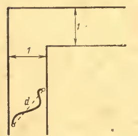


Рис. 33.

В этой задаче естественно характеризовать «размер» ветки ее диаметром $d = AB$, так как ясно, что можно указать ветку сколь угодно большой длины, такую, что она сможет свободно миновать поворот канала: для этого только необходимо, чтобы ветка была достаточно извилистой.

82. На плоскости даны n точек (где $n = 2$, 3, 4 или 5), расстояние между каждыми двумя из которых не меньше 1. Докажите, что диаметр d этой системы точек

а) $\geqslant 1$ при $n = 2$ или 3;

б) $\geqslant \sqrt{2}$ ($\approx 1{,}41$) при $n = 4$;

в) $\geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\approx 1{,}61$) при $n = 5$,

причем все эти оценки являются наилучшими из возможных.

Обозначим наименьшее возможное значение диаметра системы n точек плоскости, каждые две из которых удалены друг от друга на расстояние $\geqslant 1$, через $d(n)$, или $d_2(n)$:

$$d(n) = \min_{\mathscr{P}_n} \max_{i,j} A_iA_j, \quad \text{где} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathscr{P}_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \quad \text{и} \quad \min_{i,j} A_iA_j \geqslant 1; \qquad (*)$$

задача 82 требует определить величину $d_2(n)$ при $n = 2$, 3, 4 и 5. Известно также, что

$$d_2(6) = 2\cos 72° \ (\approx 1{,}90) \quad \text{и} \quad d_2(7) = 2,$$

причем оптимальные с интересующей нас точки зрения конфигурации 6 или 7 точек изображены на рис. 34 (см. П. Бейтман и П. Эрдёш [70]); однако *никакие другие значения величины* $d_2(n)$ *пока, видимо, неизвестны*. Аналогично этому, если величина $d_3(n)$ определяется тем же условием (*), где $\mathcal{P}_n \equiv \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — система произвольных n точек (трехмерного) пространства, то почти очевидно, что $d_3(n) = 1$ при $n = 2$, 3 и 4 (почему?). С другой стороны, из результата задачи 31 б) цикла задач 2 почти немедленно следует, что $d_3(6) \geqslant \sqrt{2}$: это вытекает из того, что если стороны AB и BC треугольника ABC обе $\geqslant 1$, а $AC < \sqrt{2}$, то $\angle ABC$ обязательно острый (последнее сразу следует из теоремы, обратной теореме Пифагора; помогает вам это замечание установить связь между неравенством $d_3(6) \geqslant \sqrt{2}$ и задачей 31б)?). С другой стороны, рис. 35, *а, б* (на одном из которых изображен так называемый *правильный октаэдр*, а на втором — *правильная треугольная призма* с квадратными боковыми гранями) показывает, что $d_3(6) \leqslant \sqrt{2}$; таким образом,

$$d_3(6) = \sqrt{2} \quad (\approx 1{,}41),$$

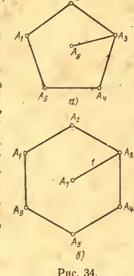
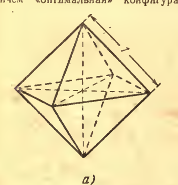


Рис. 34.

причем «оптимальная» конфигурация из 6 точек является не единственной (рис. 35). Наконец, К. Шютте [46] установил, что



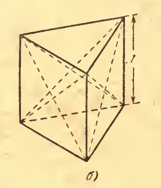


Рис. 35.

$$d_3(5) = \frac{2\sqrt{21}}{7} \quad (\approx 1{,}31);$$

никакие другие значения величин $d_3(n)$ нам *неизвестны.* Более того, если обозначить через $d_k(n)$ ту же величину (*), где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные n точек k-мерного евклидова пространства[1]), то, помимо указанных выше значений $d_2(n)$ и $d_3(n)$ и тривиальной формулы

$$d_1(n) = n - 1 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2$$

(можете вы ее объяснить?), точно известны лишь значения $d_k(n)$ при $k \leqslant n + 2$:

$$d_k(n) = 1 \quad \text{при} \quad 2 \leqslant n \leqslant k + 1$$

(это почти очевидно) и

$$d_k(k+2) = \begin{cases} \sqrt{1 + \dfrac{2}{k}} & \text{при } k \text{ четном,} \\ \sqrt{1 + \dfrac{2(k+2)}{k(k+2) - 1}} & \text{при } k \text{ нечетном} \end{cases}$$

(см. К. Шютте [46]).

Представляют интерес и *приближенные* оценки величины $d(n)$ при больших значениях n. Из нижеследующей задачи 83 как будто вытекает, что $d_2(n)$ при большом n растет примерно как $\sqrt{n}$. Эту оценку можно еще несколько уточнить; рассмотрение «шестиугольной конфигурации» точек на плоскости (см. рис. 36) позволяет заключить, что при большом n

$$d_2(n) \sim \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \ (\approx 1{,}05\sqrt{n})$$

в том смысле, что отношение

$$d_2(n) : \left[\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}\right] \to 1$$

Рис. 36.

при $n \to \infty$. Аналогичные соображения позволяют заключить, что при любом k

$$d_k(n) \sim c_k \sqrt[k]{n},$$

где c_k — некоторое постоянное число (зависящее, разумеется, от k); однако точное значение этого числа не известно ни при каком $k > 2$ (в частности, не известно даже число c_3).

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 32.

83. Диаметр d системы $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ точек плоскости равен 1, а наименьшее из попарных расстояний между точками равно μ. Докажите, что

а) $\mu < \frac{2(\sqrt{n}+1)}{n-1}$;

б) более того, $\mu < \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{n}+1)}{3(n-1)}$.

Задача 83 в определенном смысле «обратна» задаче 82 — ранее мы задавали $\min_{i,j} A_iA_j = 1$ (или $\geqslant 1$) и оценивали $\max_{i,j} A_iA_j = d$ (где $i, j = 1, 2, \ldots, n$); теперь же мы, напротив, предполагаем известным $\max A_iA_j = d\ (=1)$, а ищем $\min A_iA_j = \mu$. Поэтому ясно, что результаты задачи 82 можно переистолковать как (точные!) оценки рассматриваемого в задаче 83 числа $\mu = \mu(n)$ при небольших n; напротив, из результата задачи 83 вытекает, что

а) $d_2(n) \geqslant \frac{\sqrt{n}-1}{2}$;

б) $d_2(n) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n}-1)$

(по поводу улучшения и последней оценки см. примечание в конце решения задачи 83).

Задачи 82 и 83 можно сформулировать еще и как задачи оценки отношения

$$\frac{\max A_iA_j}{\min A_iA_j}, \quad \text{где} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

при этом становится ясной их близость к задаче 3 цикла 1.

84. Все звенья замкнутой n-звенной ломаной (быть может, самопересекающейся, но «невырожденной» — такой, что все вершины ломаной различны и все звенья принадлежат разным прямым) равны 1.

а) Чему равно наименьшее возможное значение диаметра ломаной, если $n = 2, 3, 4, 5, 6$?

б) При каких n диаметр ломаной может равняться 1? При каких n он не может равняться 1, но может быть сколь угодно близок к 1?

85. Все стороны выпуклого n-угольника диаметра d равны 1. Докажите, что

а) если $n=3$, то $d=1$;

б) если $n=4$, то $2 > d \geqslant \sqrt{2}$ $(\approx 1{,}41)$;

в) если $n=5$, то $2 > d \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\approx 1{,}61)$;

г)* если $n=6$, то $3 > d \geqslant \sqrt{2+\sqrt{3}}$ $(\approx 1{,}93)$,

причем ни одна из этих оценок не может быть улучшена.

Если d есть диаметр выпуклого n-угольника со сторонами длины 1, *то, как нетрудно показать,*

$$d < \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{при } n \text{ четном}, \\ \frac{n-1}{2} & \text{при } n \text{ нечетном}; \end{cases}$$

таким образом, отыскание наибольшего возможного значения[1] $\Delta(n)$ диаметра d не представляет труда $\left(d = \Delta(n) = \frac{n}{2}\right.$ или $\left.\frac{n-1}{2}\right.$ для «вырожденных» n-угольников, ряд вершин которых — или даже все вершины — принадлежат одной прямой). Совсем иной характер имеет задача отыскания наименьшего возможного значения[1] $\delta(n)$ диаметра d. В задачах 85 а) и в) утверждается, что при $n = 3$ и 5

$$\delta(n) = \frac{\sin\frac{(n-1)\,90^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}, \qquad (*)$$

т. е. $\delta(n)$ равно *диаметру правильного n-угольника со стороной* 1: в самом деле, очевидно,

$$\frac{\sin\frac{(3-1)\cdot 90^\circ}{3}}{\sin\frac{180^\circ}{3}} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ} = 1 = \delta(3)$$

и

$$\frac{\sin\frac{(5-1)\,90^\circ}{5}}{\sin\frac{180^\circ}{5}} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \delta(5).$$

Также и при $n = 4$ величина $\delta(n)$ равна *диаметру* $\sqrt{2}$ *правильного 4-угольника* (квадрата) *со стороной* 1. С другой стороны, при $n = 6$ величина $\delta(n)$ оказывается меньше диаметра 2 правильного 6-угольника со стороной 1: в задаче 85 г) утверждается, что

$$\delta(6) = \frac{1}{2\sin 15^\circ} = 2\sin 75^\circ = \sqrt{2+\sqrt{3}},$$

[1]) Если ограничиться множеством $\mathcal{M}_n$ «истинных» (или «невырожденных») выпуклых n-угольников, то надо считать, что $\Delta(n) = \sup_{\mathcal{M}_n} d$ при $n > 3$, но не $\Delta(n) = \max_{\mathcal{M}_n} d$, поскольку наибольшее значение величины d здесь не достигается; в противоположность этому во всех случаях $\delta(n) = \min_{\mathcal{M}_n} d$.

т. е. что $\delta(6)$ равно *радиусу окружности, описанной вокруг правильного 12-угольника со стороной* 1 — половине диаметра этого 12-угольника.

Задаче определения наименьшего возможного значения $\delta(n)$ диаметра выпуклого равностороннего n-угольника со стороной 1 посвящена статья [71] венгерского геометра С. Винце, которому этот вопрос был поставлен П. Эрдёшем; еще раньше той же задачей занимался немецкий математик К. Рейнгардт [72]. С. Винце установил, что для всех нечетных n значение $\delta(n)$ задается формулой (*) (однако лишь при n простом правильный n-угольник со стороной 1 является *единственным* выпуклым n-угольником диаметра $\delta(n)$, все стороны которого равны 1). При четном n, не являющемся целой степенью числа 2, величина $\delta(n)$ определяется по формуле

$$\delta(n) = \frac{1}{2\sin\frac{90^\circ}{n}}, \qquad (**)$$

т. е. $\delta(n)$ равно половине диаметра правильного $2n$-угольника со стороной 1; доказательство формулы (**) при $n = 6$ и составляет основное содержание задачи 85 г). Для $n = 2^k$, где $k \geqslant 3$ (и k — целое число) величину $\delta(n)$ пока никому не удалось определить; показано только [71], что в этом случае

$$\frac{1}{2\sin\frac{90^\circ}{n}} \leqslant \delta(n) \leqslant \frac{\sin\frac{(n-1)\,90^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} \qquad (***)$$

(т. е. что величина $\delta(n)$ заключается между диаметром правильного n-угольника со стороной 1 и половиной диаметра правильного $2n$-угольника со стороной 1), причем при $k \geqslant 3$, видимо, оба неравенства в соотношении (***) — строгие

86. Диаметр
а) треугольника,
б) четырехугольника,
в)* выпуклого четырехугольника
равен 1. Какими могут быть
1) площадь,
2) периметр
этого многоугольника?

Если диаметр (выпуклого или невыпуклого!) n-угольника равен 1, то, как легко показать (ср. с решением задачи 86),

$$2 < P < n,$$

где P — периметр n-угольника, причем это двойное неравенство нельзя улучшить (т. е. периметр n-угольника диаметра 1 может быть сколь угодно близок к 2 и сколь угодно близок к n; равенства $P = 2$ и $P = n$ выполняются для «вырожденных многоугольников», у которых несколько последовательных вершин — или даже

все вершины! — принадлежат одной прямой, или несколько вершин совпадают). Также и периметр выпуклого n-угольника диаметра 1 всегда больше 2, но может быть сколь угодно близок к 2; однако задача определения *наибольшего* возможного значения $\Pi(n)$ периметра выпуклого n-угольника диаметра 1, видимо, непроста. Нетрудно также понять, что площадь $S(n)$ (выпуклого или невыпуклого) n-угольника M диаметра 1 всегда положительна, но может быть сколь угодно малой (равенство $S=0$ достигается для «вырожденного» n-угольника, все вершины которого принадлежат одной прямой); однако определение *наибольшего* возможного значения $\Sigma(n)$ площади многоугольника M диаметра 1[1]) может оказаться и трудной задачей.

Периметр P и площадь S произвольной плоской выпуклой фигуры F диаметра 1 (см. стр. 55—56) *удовлетворяют неравенствам*

$$2<P\leqslant\pi \quad \text{и} \quad 0<S\leqslant\frac{\pi}{4},$$

причем наибольшую площадь $\frac{\pi}{4}$ из всех фигур диаметра 1 имеет лишь *круг*, в то время как наибольший периметр π имеют бесконечно много разных выпуклых фигур диаметра 1 (см., например, [29], § 6). Если же фигура F не обязательно является выпуклой, то по-прежнему

$$0<S\leqslant\frac{\pi}{4},$$

Рис. 37.

однако периметр $P>2$ фигуры F может уже быть *сколь угодно большим* (на рис. 37 изображена фигура F, периметр которой по сравнению с ее диаметром очень велик).

Пусть A и B — такие две точки фигуры (или множества точек) F, что расстояние $AB=d$ является наибольшим из расстояний между точками F (см. рис. 32, *а, б* на стр. 69); тогда *диаметром F* называется не только число d, но также и отрезок AB (иногда AB называют «диаметром-отрезком» фигуры F). От П. Эрдёша [73] идет задача определения *наибольшего возможного числа диаметров* (понимаемых здесь, как о том свидетельствует само использование множественного числа, в смысле «диаметров-отрезков») *конечного множества точек.*

87. а) На плоскости даны n точек, расстояние между каждыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что из этих точек нельзя выбрать более n пар точек таких, что расстояние между выбранными точками равно 1.

Может ли число пар точек, удаленных одна от другой на расстояние 1, равняться n?

б)** В пространстве даны n точек, расстояние между каждыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что

[1]) Нетрудно видеть, что площадь величины $\Sigma(n)$ будет иметь обязательно выпуклый n-угольник.

эта система точек содержит не более $2n-2$ пар точек, расстояние между которыми равно 1.

Может ли число пар точек, удаленных одна от другой на расстояние 1, равняться $2n-2$?

Задачи 87 а) и б) можно также сформулировать следующим образом: *докажите, что наибольшее возможное число диаметров выпуклого n-угольника равно n, а наибольшее число диаметров выпуклого многогранника с n вершинами* («выпуклого n-вершинника») *равно* $2n-2$. Первая из этих задач не является особенно сложной; впервые она была, как будто, решена знаменитым швейцарским геометром Хейнцем Хопфом и Е. Панвицем [74]; в 1965 г. она была предложена для решения школьникам разных стран — участникам VII Международной олимпиады и получила довольно много решений. Гораздо более трудной является задача 87 б). Статья [73] не содержала решения этого вопроса: в ней Эрдёш лишь доказывал, что наибольшее возможное число диаметров n-точечного плоского множества равно n (результат Хопфа — Панвица, составляющий содержание задачи а)) и со ссылкой на другого венгерского математика А. Важоньи (A. Vázsonyi) высказывал предположение о том, что в случае соответствующей стереометрической задачи это число равно $2n-2$ (результат задачи б); его независимо доказали в 1956—1957 гг. Б. Грюнбаум, венгр А. Хеппеш и поляк С. Страцевич [75]).

Бросающееся в глаза различие в степени трудности задач 87 а) и б) создает плохие перспективы при попытках перенесения результатов этих задач на общий случай k-мерного евклидова пространства[1]). И действительно, общая задача *определения наибольшего возможного числа $N_k(n)$ диаметров n-точечного множества, расположенного в k-мерном* (евклидовом) *пространстве*, не решена до сих пор, — и пока даже не видно никаких обнадеживающих подходов к решению этой задачи. Легко, конечно, видеть, что

$$N_k(n)=C_n^2 \quad \left(=\frac{n(n-1)}{2}\right) \quad \text{при} \quad n\leqslant k+1,$$

но даже, скажем, точное значение величины $N_4(6)$, видимо, остается неизвестным. Помимо формул $N_2(n)=n$ и $N_3(n)=2n-2$ (результаты задачи 87), мы знаем лишь, что $N_1(n)=1$ при всех n (эта формула не представляет ни малейшего интереса, ибо оценивается здесь число диаметров множества точек одной *прямой*!) и имеем некоторые оценки для «общих» величин $N_k(n)$. Наиболее сильные результаты в этом направлении получил тот же П. Эрдёш [76], который установил, что

$$N_4(n)=\frac{1}{4}n^2+\ \ldots,\quad N_5(n)=\frac{1}{4}n^2+\ \ldots \qquad (1-2)$$

и вообще

$$N_{2m}(n)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right)n^2+\ \ldots,$$
$$N_{2m+1}(n)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right)n^2+\ \ldots, \qquad (3-4)$$

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 32.

где точками обозначен (пока неизвестный, быть может даже отрицательный) «остаточный член» r, малый по сравнению с выписанным членом в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r}{n^2}=0$ (разумеется, этот член $r=r(k,n)$ в формуле для $N_k(n)$ зависит и от n и от k)[1].

Ясно, что если не ограничивать число n точек, образующих множество (или фигуру) F, то и число $N(n)$ диаметров этой фигуры может быть *сколь угодно большим*. При этом, если F — «непрерывная» (или «сплошная») фигура, содержащая бесконечно много точек, то не исключен даже и тот случай, когда к а ж д а я (граничная) точка A фигуры F имеет «диаметрально противоположную» точку, т. е. такую граничную точку B, что AB — диаметр фигуры F[2]. Так будет обстоять дело, например, в том случае, когда (плоская) фигура F — это *круг* (рис. 38, *а*), но далеко не только в этом случае. Так, если фигура F ограничена тремя дугами: $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile CA$ одного радиуса d, построенными вне равностороннего $\triangle ABC$ со стороной d на его сторонах (рис. 38, *б*), то также к а ж д а я граничная точка F имеет «диаметрально противоположную» (см., например, § 7 книги [29]; фигуру F впервые рассматривал французский механик XIX века Ф. Р е л о (F. Reuleaux), по имени которого она называется *треугольником Рело*).

A B
а)
A C₁ B C B₁ B₁′
б)

Рис. 38.

От того же П. Э р д ё ш а [77] идет еще одно любопытное обобщение задач 87. Примем, для простоты, диаметр фигуры (множества точек) F з а е д и н и ц у длины; хорду AB длины $\geqslant a$, соединяющую две точки A и B фигуры F, мы назовем *а-диаметром F*. (Другими словами, хорда $AB=l$ в том и только в том случае является a-диаметром F, если $\frac{l}{d}\geqslant a$, где d — диаметр F.)

Ясно, что понятие a-диаметра имеет смысл только при $0\leqslant a\leqslant 1$; при этом 1-диаметры фигуры F совпадают с ее (обычными) диаметрами (т. е. с «диаметрами-отрезками»), а 0-диаметрами являются в с е хорды F.

Задача Эрдёша состоит в оценке *наибольшего возможного числа $N(a,n)$ а-диаметров n-точечного множества*. При этом, в про-

[1]) П. Э р д ё ш [76] показал также, что в левой части формул (1—4) величину $N_k(n)$ можно заменить (вообще говоря, большей чем $N_k(n)$!) величиной $M_k(n)$ — *наибольшим возможным числом равных между собой* (но не обязательно равных d) отрезков из числа C_n^2 отрезков, соединяющих попарно наши n точек.

[2]) По поводу родственных задач, связанных с рассмотрением (определяемых несколько по-иному) пар «диаметрально противоположных точек» в к о н е ч н ы х системах точек см. Б. Г р ю н б а у м [45].

тивоположность задаче определения числа $N(n)$ обыкновенных диаметров, этот вопрос является содержательным даже для точек одной прямой.

88. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — n последовательных точек одной прямой; будем считать, что $A_1A_n = 1$ и зададим некоторое число a (где $0 \leqslant a \leqslant 1$). Чему равно наибольшее возможное число тех из $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ отрезков A_iA_j (где $i, j = 1, 2, \ldots$ или n), длина которых $\geqslant a$?

Что же касается общей оценки числа $N(a, n)$ a-диаметров плоского или пространственного n-точечного множества, то здесь нам известно весьма мало. Конечно, если n мало, то определить число $N(a, n)$ нетрудно: так, легко понять, что если $N_k(a, n)$ есть наибольшее число a-диаметров системы n точек, расположенных в k-мерном евклидовом пространстве (так что соответствующие планиметрическая и стереометрическая задачи состоят в определении величин $N_2(a, n)$ и $N_3(a, n)$), то *при всех* a

$$N_2(a, 3) = 3, \quad N_3(a, 4) = 6$$

и даже вообще

$$N_k(a, n) = C_n^2 \left(= \frac{n(n-1)}{2}\right) \text{ при всех } a \text{ и всех } n \leqslant k + 1.$$

Для других небольших значений n величины $N_2(a, n)$ и $N_3(a, n)$ также поддаются вычислению.

89. На плоскости даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расстояние между каждыми двумя из которых не превосходит 1 и задано также число a (где $0 \leqslant a \leqslant 1$). Чему равно наибольшее возможное число $N_2(a, n)$ отрезков A_iA_j (где $i, j = 1, 2, \ldots$ или n), длина которых $\geqslant a$, если

а) $n = 4$;

б) $n = 5$;

в) $n = 6$

(число $N_2(a, n)$, разумеется, будет разным для разных значений a)?

Однако для систем из произвольного (быть может, весьма большого!) числа n точек плоскости или пространства пока известно как будто, лишь что

$$N_2(a, 3m) = \begin{cases} 3m & \text{при } a = 1, \\ 3m^2 & \text{при } 1 > a > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ ? & \text{при } \frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant a > ? \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

откуда также следует, что при всех $n > 4$

$$N_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, n\right) = \left[\frac{n^2}{3}\right],$$

где квадратные скобки означают целую часть числа (Эрдёш [76]).

Наконец, укажем еще одну также идущую от П. Эрдёша [73] задачу, в известном смысле обратную задаче оценки числа $N(n)$ диаметров n-точечного множества. Назовем *минидиаметром* δ системы $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ точек наименьшее из C_n^2 расстояний (чисел) A_iA_j:

$$\delta = \min_{i, j} A_iA_j, \quad \text{где} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

а также те из отрезков A_iA_j, которые имеют эту наименьшую длину δ (рис. 39). Задача, о которой здесь идет речь, состоит в определении *наибольшего возможного числа* $\nu(n)$ *минидиаметров n-точечного множества.*

Рис. 39.

Нетрудно понять, что в случае системы точек одной прямой соответствующее число $\nu_1(n)$ равно

$$\nu_1(n) = n - 1$$

(почему?); однако уже точное определение числа $\nu_2(n)$, отвечающего соответствующей планиметрической задаче, представляет большие трудности. [Заметьте, что планиметрическая задача определения числа $N_2(n)$, т. е. задача 87 а), решается сравнительно легко.] Поэтому (если исключить мало интересный случай небольших n — см. ниже задачу 90) нам здесь приходится довольствоваться лишь теми или иными оценками числа $\nu(n)$ (см. задачу 91).

90. На плоскости даны 4 точки A_1, A_2, A_3, A_4, расстояние между каждыми двумя из которых не меньше 1. Чему равно наибольшее возможное число соединяющих попарно эти точки отрезков A_iA_j длины 1?

91. На плоскости даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что если ни один из отрезков A_iA_j (где $i, j = 1, 2, \ldots, n$) не меньше 1, то число равных 1 отрезков A_iA_j не превосходит $3n$.

Несколько уточнив составляющие решение задачи 91 рассуждения, П. Эрдёш [73] показал также, что

$$\nu_2(n) \leqslant 3n - 6;$$

однако это усиление результата задачи 91 является довольно бедным. Использовав совсем другие (и гораздо более сложные) соображения, Эрдёш сумел также установить существование таких двух положительных чисел c_1 и c_2 (где $c_1 < c_2$), что

$$3n - c_1\sqrt{n} > \nu_2(n) > 3n - c_2\sqrt{n}$$

при всех n; этот результат является, видимо, самым сильным из всех известных до сих пор, связанных с оценками числа $\nu(n)$. (Разумеется, можно также поставить вопрос об определении *наибольшего возможного числа* $\nu(a, n)$ *a-минидиаметров n-точечного множества* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ минидиаметра δ, где *a*-м и н и д и а м е т р о м называется каждая хорда A_iA_j длины l такая, что $l/\delta \leqslant a$; однако трудность оценки числа $\nu(n)$ делает мало перспективной задачу нахождения числа $\nu(a, n)$.)

С понятиями диаметра (и *a*-диаметра) фигуры F связана еще одна задача, стоящая несколько в стороне от нашей основной проблематики, но привлекательная тем, что здесь мы имеем случай полного решения вопроса, каких — увы! — ранее почти не встречали. Назовем ц е н т р о м (соответственно *a*-ц е н т р о м) фигуры F *середину ее диаметра* (соответственно *середину ее a-диаметра*); совокупность $Ц(F)$ всех центров (соответственно совокупность $Ц(a, F)$ всех *a*-центров) фигуры F назовем ее ц е н т р а л ь н о й ф и г у р о й

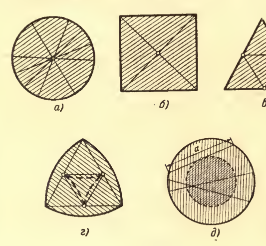


Рис. 40.

(соответственно *a*-ц е н т р а л ь н о й ф и г у р о й). Так, например, центральные фигуры $Ц(Кр)$ и $Ц(Кв)$ круга $Кр$ и квадрата $Кв$ состоят из единственной точки (рис. 40, *а*, *б*); центральная фигура $Ц(Тр)$ правильного треугольника $Тр$ состоит из трех точек, образующих треугольник $тр$ в два раза меньшего размера (рис. 40, *в*); центральная фигура $Ц(Р)$ треугольника Рело $Р$ (см. выше, стр. 78, в частности рис. 38, *б*) представляет собой контур в два раза

меньшего «вывернутого треугольника Рело» p' (рис. 40, *г*); a-центральной фигурой $Ц(a, Kp)$ круга Kp радиуса 1 является концентрический с Kp круг $кр$ радиуса $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$ (рис 40, *д*).

92*. Пусть F — произвольная (выпуклая) фигура, диаметр которой мы примем за единицу длины. Обозначим через z диаметр центральной фигуры $Ц(F)$ фигуры F; через $z(a)$ — диаметр ее a-центральной фигуры $Ц(a, F)$. Докажите, что

а) $$z \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если фигура } F \text{ плоская,} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если фигура } F \text{ пространственная;} \end{cases}$$

б) $$z(a) \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} 1-\frac{a^2}{2}, & \text{если фигура } F \text{ плоская,} \\ \sqrt{1-\frac{a^2}{2}}, & \text{если фигура } F \text{ пространственная,} \end{cases}$$

причем все эти неравенства улучшить уже нельзя.

Нетрудно понять, что если фигура F «одномерная», т. е. отрезок, то определяемые аналогично условию задачи 92 величины z и $z(a)$ равны 0 и $1-a$ (рис. 41). Укажем еще, что задача 92 любопытна в том отношении, что здесь **не происходит** обычного увеличения трудности задачи при переходе от планиметрического варианта задачи к стереометрическому (и многомерному): решение аналогичной задачи, поставленной для (выпуклых) фигур **произвольного** числа k измерений, где $k \geqslant 3$, ничем практически не отличается от решения стереометрического варианта задачи 92, и ответ здесь остается тем же: если $z_k(a)$ есть наибольший возможный диаметр a-центральной фигуры $Ц(a, F)$ (здесь F — какая угодно k-мерная выпуклая фигура диаметра 1), то

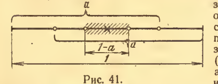


Рис. 41.

$$z_k(a) = \sqrt{1-\frac{a^2}{2}} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant 3$$

$\left(\text{но } z_2(a) = 1-\frac{a^2}{2} \text{ и } z_1(a) = 1-a\right)$. В то же время планиметрический вариант задачи 92 уже отличается от стереометрического и k-мерного и — неожиданным образом — оказывается несколько сложнее их (см. Ю. Г. Дуткевич [78]).

93. Докажите, что каждую фигуру F диаметра 1 можно заключить в

а) квадрат Q со стороной 1;

б) круг K радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в)* правильный шестиугольник P со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) правильный треугольник T со стороной $\sqrt{3}$, причем ни одну из фигур Q, K, P, T нельзя уменьшить, сохранив ее форму, с тем, чтобы она продолжала удовлетворять условию задачи.

94. а) Дан треугольник $T \equiv \triangle ABC$ (т. е. мы знаем все его стороны и углы). Известно, что круг k радиуса r можно целиком заключить в T (рис. 42, *а*); каким может быть r? Известно, что T можно целиком заключить в круг K радиуса R (рис. 42, *б*); каким может быть R?

б) Дан треугольник $T \equiv \triangle ABC$. Известно, что круг $\varkappa$ пересекает все стороны T (не продолжения сторон, а именно стороны — рис. 42, *в*). Какие значения может иметь радиус ρ этого круга?

в) Мышиная норка имеет три выхода M_1, M_2 и M_3. Где должна сидеть кошка K, для того чтобы расстояние от занимаемой K позиции до самого далекого из трех выходов из норки было меньше всего?

г) Выведите из решения задачи а) результат задачи 93 б) для того случая, когда фигура F состоит из конечного числа точек.

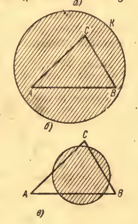


Рис. 42.

Ясно, что в условии задачи 94 а) величина r может быть сколь угодно мала ($\min r = 0$ или, точнее, $\inf r = 0$ — см. выше, стр. 17), а величина R — сколь угодно велика (последнее можно передать символической записью $\sup R = \infty$); таким образом, речь здесь идет об отыскании величин $\max r$ и $\min R$ (одна из них определяется проще, чем другая — какая именно?). Аналогично этому содержание задачи 94, б) составляет нахождение величин $\inf \rho$ и $\sup \rho$ (и здесь одну из этих двух величин найти проще другой). Задача 94 в) в неоднократно уже употреблявшихся в этой

книге обозначениях может быть сформулирована так: чему равно число

$$P = \min_K \max_i KM_i, \quad \text{где} \quad i = 1, 2 \text{ или } 3,$$

и *что представляет собой множество точек K* (оно может состоять и из единственной точки!), для которых $\max_i KM_i = P$. Эта задача является довольно простой; также и усложнение ее, получаемое, если считать, что мышиная нора имеет *четыре* или большее число выходов $M_1, M_2, \ldots$, не является особенно серьезным. Однако случай произвольного числа m выходов $M_1, M_2, \ldots, M_m$ из норки и нескольких кошек $K_1, K_2, \ldots, K_k$ (составляющих единую «кошачью коалицию»), для которых надо выбрать систему наиболее выгодных позиций, приводит уже к существенным осложнениям, которые можно еще увеличить, предположив скорости бега разных кошек различными и задаваясь задачей о таком «оптимальном» размещении точек $K_1, K_2, \ldots, K_k$, чтобы *наибольшее из расстояний K_iM_j (где $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$; расстояние K_iM_j измеряется в зависящих от номера i единицах длины*, задаваемых скоростью бега i-й кошки) *было меньше всего.*

95. а) На плоскости дано конечное число равных кругов, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все круги имеют общую точку.

б) Выведите из результата задачи а) еще одно доказательство утверждения задачи 93 б) для фигур F, представляющих собой конечное множество точек.

Задача 95 а) утверждает, что *если n равных кругов брошены на плоскость так, что каждые три из них можно проколоть одной иглой, то и все круги можно проколоть одной иглой.* Утверждение этой задачи допускает значительное обобщение: в ней не надо требовать, чтобы все круги были равны между собой; более того, здесь можно даже заменить n кругов *n произвольными плоскими выпуклыми фигурами.* Последнее обобщение предложения задачи 95 а) принадлежит немецкому математику Эдуарду Хелли (E. Helly); по его имени оно называется теоремой Хелли. Теореме Хелли, ее вариантам, обобщениям и приложениям посвящена содержательная книга [18]; много места уделено этой теореме также в книгах [16] и [29].

Естественный вариант теоремы задачи 95 а) принадлежит венгерскому математику Т. Галлаи (T. Gallai), который, предположив, что *каждые два из заданных на плоскости n* (не обязательно равных) *кругов можно проколоть одной иглой*, поставил вопрос *о наименьшем числе ϰ игл, которыми*, наверное, *можно проколоть все круги* (Галлаи предположил, что это число является конечным). Венгр Л. Стахо [79] доказал, что «число Галлаи» $\varkappa \leq 5$; имеются сведения о том, что Л. Данцер снизил это число до 4 (причем последний результат уже является окончательным), однако пока это нигде не опубликовано. По поводу «задачи Галлаи» см. книгу [18] и 2-е издание книги [24], где имеются также иные варианты этой задачи и указана дополнительная литература.

В задаче 93 спрашивается о наименьшем квадрате, наименьшем круге и т. д., внутрь которых можно заключить *каж-*

дую плоскую фигуру F диаметра 1. Так как диаметр квадрата, круга и т. д., покрывающего фигуру F, не может быть меньше диаметра F, то из этой задачи следует, что сторона a наименьшего квадрата (соответственно радиус R наименьшего круга, сторона b наименьшего правильного шестиугольника, сторона c наименьшего правильного треугольника), в который можно заключить *конкретную* фигуру F диаметра 1, заключается в пределах:

$$0{,}707 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant 1,$$

$$0{,}5 = \frac{1}{2} \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577,$$

$$0{,}5 = \frac{1}{2} \leqslant b \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577,$$

$$1 \leqslant c \leqslant \sqrt{3} \approx 1{,}732,$$

причем нетрудно видеть, что все эти оценки являются точными $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ — это сторона квадрата диаметра 1; $\frac{1}{2}$ — радиус круга диаметра 1 и т. д.). Наибольшей известностью из всех задач такого рода пользуется задача о *наименьшем круге, которым можно покрыть любую фигуру диаметра* 1; эта задача была поставлена и решена в 1910 г. известным английским математиком Г. У. Е. Юнгом [80], в силу чего результат задачи 93 б) часто называют теоремой Юнга $\left(\text{а круг радиуса } \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ — кругом Юнга}\right)$.

С задачей 93 связана одна известная проблема, которая не решена до сих пор. Условимся называть каждую фигуру F, которой можно покрыть любую фигуру f диаметра 1, *универсальной покрышкой* — для наглядности здесь можно представить себе салфетку F, которой можно покрыть имеющееся на скатерти пятно f, причем нам известно лишь, что диаметр пятна $\leqslant 1$. Еще в 1914 г. знаменитый французский математик Анри Лебег (H. Lebesgue) в беседе с венгром И. Палом поставил задачу о нахождении *универсальной покрышки наименьшей возможной площади* (или *наименьшего возможного периметра*); эту задачу (в первую очередь в ее относящемся к площади варианте) в настоящее время называют проблемой Лебега. В 1920 г. И. Пал рассказал о своей беседе с Лебегом в статье [82], в которой он изложил все полученные им по этой проблеме результаты. Впоследствии проблеме Лебега была посвящена довольно большая литература (см., например, обзор ее в книге немецкого математика Г. Мешковского [81]); однако полученные здесь пока результаты никак нельзя считать окончательными.

Нетрудно видеть, что площади универсальных покрышек, фигурирующих в задаче 93, таковы:

$$S_Q = 1^2 = 1, \qquad S_K = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}047,$$

$$S_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866, \quad S_T = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}299;$$

такнм образом,

$$S_T > S_K > S_Q > S_P,$$

т. е. самой «экономной» из этих покрышек является *правильный шестиугольник P*, найденный упомннавшимся выше И. Палом [82]. То, что шестиугольник Пала P является «лучшей» покрышкой, чем круг Юнга K, сразу следует нз того, что P можно получить из K, отрезав от K 6 сегментов, отвечающих центральным углам в 60° (ср. рис. 43, *а* и *г*). Однако и шестиугольник P не является самой выгодной нз всех возможных покрышек (см. ниже задачу 96 б).

96. а) Докажите, что каждую фигуру диаметра 1 можно заключить в шестиугольник U, получаемый из квадрата $Q \equiv A_1A_2A_3A_4$ со стороной 1 отсечением от последнего двух треугольников Δ_1 и Δ_2, образованных сторонами квадрата Q и касательными к вписанному в Q кругу k, перпендикулярными биссектрисам углов A_1 и A_2 квадрата (ср. рис. 43, *б* и *в*).

б) Докажите, что каждую фигуру диаметра 1 можно заключить в (неправильный) восьмиугольник V, получаемый из правильного шестиугольника $P \equiv$ $\equiv A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$ отсечением от последнего двух треугольников Δ_1 и Δ_2 с помощью касательных t_1 и t_3 к вписанному в P кругу k, перпендикулярных биссектрисам углов A_1 и A_3 шестиугольника (ср. рис. 43, *г* и *д*).

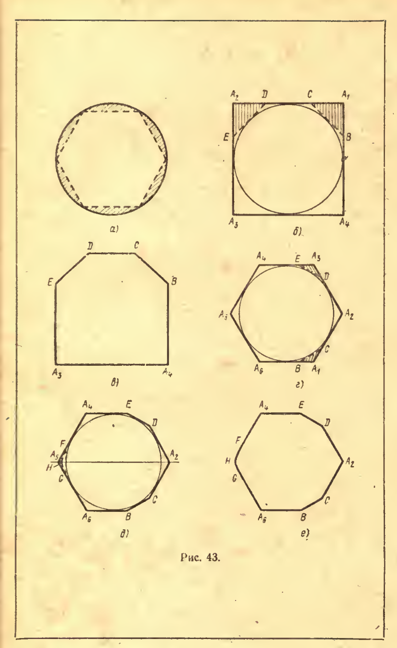
Ясно, что изображенный на рис. 43, *д* восьмиугольник $V \equiv$ $\equiv BCA_2DEA_4A_5A_6$ (его указал И. Пал в уже называвшейся работе [82]) является более экономной покрышкой, чем правнльный шестиугольннк P; его площадь

$$S_V = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}845.$$

Однако и V еще ие является самой экономной покрышкой. А именно, немецкий математик Р. Шпраг [83] доказал, что если провести две дуги: $\smile FH$ и $\smile GH$ окружностей радиуса 1 с центрами в точках C и D (рис. 43, *д*), касающнеся сторон A_4A_5 и A_5A_6 восьмиугольника V в точках F и G н пересекающиеся в точке H днагонали A_5A_2 восьмиугольника V (биссектрисы его угла A_5), то, отрезав от V два криволинейных треугольника FA_5H и GA_5H, мы получнм (криволинейный!) десятиугольник $W \equiv BCA_2DEA_4FHGA_6$, ограниченный 8 отрезкамн прямых и 2 дугами окружностей; этот десятиугольник W (см. рнс. 43, *е*) все еще является универсальной покрышкой. Прн этом

$$S_W \approx 0{,}844;$$

десятиугольник W как будто является самым малым по площадн из всех известных до настоящего временн унниверсальных покры-



а)
A2
D
C
A1
E
B
A3
A4
б)
D
C
E
B
A3
A4
в)
A4
E
A3
D
A5
A2
A6
B
C
A1
г)
A4
E
D
F
A5
A2
H
G
C
A6
B
д)
A4
E
D
F
H
A2
G
C
A6
B
е)

Рис. 43.

шек[1]). Однако у нас нет никаких оснований ожидать, что W окажется именно той универсальной покрышкой наименьшей возможной площади, отыскание которой составляет содержание проблемы Лебега; более того, до сих пор, кажется, даже неизвестно, является ли W *минимальной покрышкой* в смысле американского геометра Виктора Кли (V. Klee), т. е. такой, что никакая часть W, полученная отбрасыванием отдельных кусков этой фигуры, уже не является универсальной покрышкой[2]) (Р. Шпраг предполагал, что дело обстоит именно так; однако минимальная в смысле Кли покрышка вовсе не обязана быть наименьшей по площади из всех возможных — хотя бы потому, что таких покрышек может быть несколько и они могут иметь разные площади).

Скажем еще несколько слов о стереометрическом варианте проблемы Лебега, требующем указать *пространственное тело* Ф *наименьшего возможного объема, внутрь которого можно заключить любое тело диаметра* 1. Эта проблема является еще более сложной, чем соответствующая планиметрическая задача, и у нас сегодня имеется еще меньше надежд на скорое ее решение. Разумеется, результат Юнга может быть перенесен на пространство совсем просто. Соответствующая стереометрическая теорема была

---

[1]) Нетрудно показать, что наименьшая (по площади) выпуклая фигура, которой можно покрыть и равносторонний треугольник со стороной 1 и круг диаметра 1, «натянута» на равносторонний треугольник и круг, расположенные на плоскости так, что их центры совпадают; площадь этой фигуры Z (рис. 44) $S_Z \approx 0{,}825$. Таким образом, пределы, в которых может заключаться площадь (неизвестной нам!) наименьшей (выпуклой) «покрышки Лебега» X являются довольно узкими

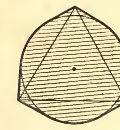


Рис. 44.

$$0{,}825 < S_Z \leqslant S_X \leqslant S_W < 0{,}845,$$

что, впрочем, нисколько не облегчает нахождения фигуры X.

[2]) В. Кли ввел понятие минимальной универсальной покрышки в связи со следующей задачей (см. [19], стр. 64): он доказал, что в планиметрическом случае минимальная универсальная покрышка не может быть очень большой по диаметру (так, например, ее диаметр наверняка <3) и поставил задачу об *определении диаметра наибольшей* (по диаметру) *плоской минимальной универсальной покрышки*, а также соответствующих величин, определенных для стереометрических (а может быть, и многомерных) минимальных универсальных покрышек, если и в пространственной геометрии все минимальные универсальные покрышки ограничены по диаметру. Однако англичанин Г. Эгглстон [84] показал, что *в пространстве существуют минимальные универсальные покрышки сколь угодно большого диаметра*, так что открытым остался лишь вопрос об оценках возможных диаметров плоских минимальных универсальных покрышек.

доказана даже раньше планиметрической — см. Г. Юнг [80][1]; — она гласит, что *каждое тело диаметра* 1 *можно заключить внутрь шара* K *радиуса* $\frac{\sqrt{6}}{4}$ и объема

$$V_K = \frac{\pi\sqrt{6}}{8} \approx 0,95,$$

причем эту оценку нельзя улучшить. Однако шар Юнга K наверняка не является универсальной (пространственной) покрышкой наименьшего возможного объема. «Пространственным вариантом» теоремы задачи 93 г) можно считать доказанную американским математиком Д. Гейлом [86] теорему о возможности *заключить каждое тело диаметра* 1 *в правильный тетраэдр* T *с ребром* $\sqrt{6}$ (объем этого тетраэдра равен $V_T = \sqrt{3} \approx 1,73$, т. е. он больше объема шара Юнга), а вариантом теоремы задачи 93 а) — теорему того же Гейла, согласно которой *универсальной пространственной покрышкой является* также *правильный октаэдр* Ω *с ребром* $\frac{\sqrt{6}}{2}$ и объемом

$$V_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866.$$

Наконец, родственный теореме задачи 96 а) результат утверждает, что *от октаэдра* Ω *можно* еще *отрезать три примыкающие к его трем вершинам пирамиды, отсекаемые от* Ω *плоскостями* τ_1, τ_2 *и* τ_3, *касающимися вписанного в* Ω *шара* $\varkappa$ *и параллельными диагональным плоскостям октаэдра*; полученный неправильный 11-гранник Г (впервые как будто указанный Б. Грюнбаумом [87]), все еще является универсальной покрышкой, а объем его равен

$$V_\Gamma = \frac{5}{2} - \sqrt{3} \approx 0,768$$

(доказательство этого результата и выразительные чертежи имеются в книге В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга [17]). При этом и одиннадцатигранник Г также, видимо, не является даже минимальной покрышкой в смысле Кли (см. стр. 88), откуда уже следует, что он не может являться решением проблемы Лебега. Укажем, наконец, что для k-мерного (евклидова) пространства также справедливы теоремы о «шаре Юнга» (радиус соответствующего k-мерного шара равен $\sqrt{\frac{k}{2k+2}}$) и о «тетраэдре Гейла» (ребро играющего роль этого тетраэдра «правильного k-мерного симплекса» равно $\frac{1}{2}\sqrt{2k(k+1)}$).

До сих пор мы искали покрышки для всех фигур заданного диаметра (который принимался за единицу длины); при этом мы упомянули о двух вариантах проблемы Лебега, в которых

[1]) Элементарное доказательство «теоремы о шаре Юнга» содержится в заметке А. Кирш [85].

покрышки характеризуются (в планиметрическом случае) своей *площадью* и своим *периметром*. Однако и сами покрываемые фигуры (или линии) можно характеризовать разными их «размерами».

97. а) Ясно, что каждую плоскую ломаную длины 1 можно заключить в круг радиуса 1: для этого достаточно, чтобы центр O круга совпадал с одним из концов ломаной. А чему равен радиус н а и м е н ь ш е г о круга, в который можно заключить каждую ломаную длины 1?

б) Ясно, что каждую плоскую замкнутую ломаную периметра 1 можно заключить в круг радиуса $\leqslant \frac{1}{2}$: для этого достаточно, чтобы центр O круга совпал с какой-либо точкой ломаной. (В этом случае для любой точки M ломаной длина какого-то из двух кусков OM ломаной будет $\leqslant \frac{1}{2}$, и тем более будет $\leqslant \frac{1}{2}$ расстояние OM.) А чему равен радиус н а и м е н ь ш е г о круга, внутрь которого можно заключить каждую замкнутую ломаную длины 1?

98. а)* Ясно, что если сторона правильного треугольника меньше 1, то найдутся ломаные длины 1, которые нельзя заключить в этот треугольник: примером здесь может служить просто отрезок длины 1. А если сторона правильного треугольника больше 1, то можно ли заключить внутрь него *каждую* ломаную длины 1?

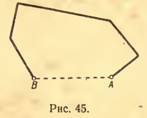


Рис. 45.

б) Можно ли заключить в правильный треугольник со стороной 1 каждую *выпуклую* ломаную длины 1? (Ломаная AB называется в ы п у к л о й, если вместе с отрезком AB она является границей выпуклого многоугольника; см. рис. 45.)

Когда мы в задачах 97 и 98 говорили о ломаных, то это было вызвано лишь желанием избежать затруднений, связанных со сложностью самого понятия произвольной линии: во всех этих задачах можно свободно говорить не о ломаных, а о (кривых) *линиях* длины 1 — это никак не повлияет на результат. (Ведь произвольную линию можно с очень большой точностью заменить многозвенной ломаной, скажем, вписанной в эту линию!) В задачах 97 а) и б) мы задаемся вопросом о *круге* н а и м е н ь ш е г о возможного радиуса, в который можно заключить любую линию заданной длины (а может быть, вы сможете решить вопрос и о *квадрате* с н а и м е н ь ш е й возможной стороной, обладающем сходным свойством?); однако в задаче 98 так поставить вопрос, к сожалению,

нельзя: до сих пор неизвестно, чему равна сторона наименьшего *правильного треугольника*, или какова (выпуклая) фигура F наименьшей возможной площади, такие, что каждую ломаную длины 1 можно заключить в T (этой задаче посвящена статья [88] видного английского математика А. С. Безиковича[1]) — см. примечание в конце решения задачи 98 а)), или, соответственно, в F (этот вариант проблемы Лебега идет от американца Лео Мозера — ср. [89 а]).

Вот еще один довольно неожиданный вариант теоремы Юнга. Условимся называть совокупность прямых плоскости ограниченной, если каждые две прямые этой совокупности пересекаются и совокупность точек пересечения прямых ограничена. Диаметром такой *совокупности прямых* мы назовем диаметр множества точек пересечения прямых: при этом, скажем, диаметр множества, состоящего из трех попарно пересекающихся прямых, совпадает с диаметром образованного ими треугольника как точечного множества (с диаметром множества его вершин) в то время как диаметр множества, состоящего из четырех прямых «общего положения», уже вовсе не обязан равняться диаметру образованного этими прямыми (выпуклого) четырехугольника (почему?).

99. а) На плоскости дано некоторое множество прямых, каждые три из которых можно пересечь кругом радиуса 1. Докажите, что все прямые можно пересечь кругом радиуса 1. (Круг считается пересекающим прямую, если он имеет с ней хотя бы одну общую точку.)

б) Ясно, что если множество прямых имеет диаметр 1, то все эти прямые можно пересечь кругом радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$: в качестве такого круга можно взять, например, «круг Юнга» (см. выше задачу 93 б)) множества точек пересечения наших прямых. Докажите, что наименьшим кругом, которым можно пересечь все прямые любого множества прямых диаметра 1, является круг радиуса $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ($\approx 0{,}289$).

Наконец, родственной теореме Юнга является и теорема, доказанная в 1914 г. видным немецким математиком Вильгельмом Бляшке [90] и оценивающая радиус *Вписанного круга* выпуклого многоугольника или произвольной плоской выпуклой фигуры (см. выше стр. 60 и 68, в частности рис. 24, *а* и рис. 31, *а*). Ясно, что радиус r Вписанного круга k выпуклого многоугольника M диаметра 1 меньше $1/2$ (ибо диаметр k меньше диаметра M), но может быть сколь угодно близок к $1/2$ (так будет обстоять дело, если M — правильный многоугольник с весьма большим числом сторон);

---

[1]) По поводу других задач, связанных с покрытием фигур треугольниками, см. Г. Эглстон [89].

с другой стороны, величина r может быть и сколь угодно малой (если многоугольник M является очень «тонким», например если M — прямоугольник с очень маленькой меньшей стороной). Таким образом, задача об оценке величины r радиуса круга, Вписанного в многоугольник M диаметра 1, не является особенно содержательной: ясно, что здесь всегда

$$\frac{1}{2} > r > 0,$$

причем эти оценки далее не могут быть улучшены.

Более интересной является задача оценки радиуса r Вписанного круга k в том случае, когда нам известна *ширина* многоугольника M, т. е. ширина Δ самой узкой полосы (образованной двумя параллельными прямыми), в которую можно заключить многоугольник M (рис. 46). Разумеется, диаметр $2r$ круга k не может

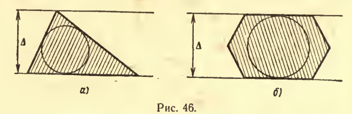


Рис. 46.

быть больше ширины Δ многоугольника (но может быть равен Δ — см. рис. 46, б), так что, если $\Delta = 1$, то $r \leqslant \frac{1}{2}$. Труднее найти наименьшее возможное значение, которое может иметь радиус r Вписанного круга многоугольника M ширины 1; соответствующий результат (см. задачу 100) и составляет содержание теоремы Бляшке.

100. а) Докажите, что в каждый выпуклый многоугольник M ширины 1 можно заключить круг радиуса $\frac{1}{3}$.

б) Покажите, что существуют выпуклые многоугольники ширины 1, внутрь которых нельзя заключить никакой круг радиуса $> \frac{1}{3}$.

Таким образом, обозначая, как обычно, через D, Δ, R и r *диаметр, ширину, радиус Описанного круга* и *радиус Вписанного круга* выпуклого многоугольника M, имеем:

если $D = 1$, *то* $0{,}5 = \frac{1}{2} \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$; другими словами, всегда $\frac{1}{2} \leqslant \frac{R}{D} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ (теорема Юнга; ясно, что если диаметр

M равен 1, то диаметр описанного круга K наверное $\geqslant 1$, и значит, $R \geqslant \frac{1}{2}$);

если $\Delta = 1$, *то* $\frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$; другими словами, всегда $\frac{1}{3} \leqslant \frac{r}{\Delta} \leqslant \frac{1}{2}$ (теорема Бляшке).

101*. Докажите, что

а) любую совокупность конечного числа точек на плоскости можно разбить на три части, каждая из которых имеет меньший диаметр, чем исходная совокупность;

б) любой выпуклый[1]) многоугольник M на плоскости можно разбить на три многоугольника, каждый из которых имеет меньший диаметр, чем M.

102.** Докажите, что:

а) любую совокупность конечного числа точек в пространстве можно разбить на четыре части, каждая из которых имеет меньший диаметр, чем исходная совокупность;

б) любой выпуклый[1]) многогранник M можно разбить на четыре многогранника, каждый из которых имеет меньший диаметр, чем M.

Задачу о *разбиении* (плоских или пространственных) *фигур на наименьшее возможное число частей, каждая из которых имеет меньший диаметр, чем исходная фигура*, впервые поставил видный польский математик Карол Борсук [91]; по его имени она называется задачей Борсука. Ясно, что для разных фигур F (которые могут состоять и из конечного числа точек) искомое число частей (в дальнейшем мы его будем обозначать через $b(F)$) будет разным. Так, например, ясно, что для неравностороннего треугольника T имеем $b(T) = 2$ (рис. 47, *а* и *б*); однако для равностороннего треугольника T_0, очевидно, $b(T_0) = 3$ (рис. 47, *в*), ибо при разбиении T_0 на *две* части одна из них обязательно будет содержать две вершины T_0, а следовательно, будет иметь такой же диаметр, как T_0. Аналогично этому для правильной треугольной пирамиды (тетраэдра) Π имеем $b(\Pi) = 2$, если диаметр Π равен ее боковому ребру (рис. 47, *г*), но $b(\Pi) = 3$, если диаметр Π равен ребру основания (рис. 47, *д*; в этом случае уже основание пирамиды нельзя разбить на две части, диаметр каждой из которых меньше

---

[1]) Заметим, что в условиях задач 101 б) и 102 б) можно отбросить требование *выпуклости* рассматриваемых фигур, ибо, скажем, каждый невыпуклый многоугольник можно заключить в выпуклый многоугольник M^* того же диаметра («выпуклая оболочка» M, контур которой можно представлять себе образованным натянутой на M и стремящейся сократиться резиновой лентой) — и разбиение M^* на части меньшего диаметра порождает и разбиение на части меньшего диаметра исходного многоугольника M.

диаметра Π) и $b(\Pi) = 4$, если Π — правильный тетраэдр, т. е. все ребра Π имеют одну и ту же длину D (рис. 47, *е*; заметьте, что при разбиении Π на *три* части хоть одна из этих частей будет содержать сразу две вершины пирамиды Π, и значит, диаметр этой части будет равен D).

К. Борсук предположил, что *каждую плоскую фигуру можно разбить на три части меньшего диаметра, а каждую пространственную фигуру — на четыре части меньшего диаметра*, но доказать это утверждение ему удалось лишь для случая плоской фигуры (ср. ниже задачу 104 а)). Результаты задач 101 а) и 101 б) делают довольно вероятным утверждение о том, что каждую плоскую фигуру можно разбить на три части меньшего диаметра: ведь если это

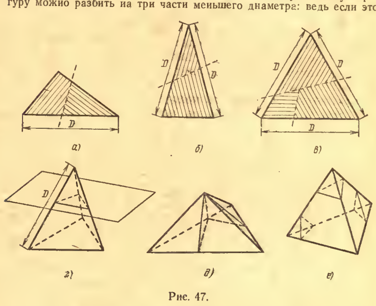


Рис. 47.

справедливо для любой конечной совокупности точек, которая может содержать и очень много точек, то трудно допустить, что существует фигура F, для которой это утверждение теряет силу (ибо фигуру F можно заменить «очень густой» конечной совокупностью точек этой фигуры). Однако доказать общую теорему Борсука о плоских фигурах, исходя из результата задачи 101 а) (или из результата задачи 101 б)), нельзя. Так же обстоит дело и в случае пространства — результаты задачи 102 (они принадлежат венгерским математикам А. Хеппешу и П. Ревесу [92]) делают очень правдоподобным относящееся к геометрии в пространстве предположение Борсука, но они не доказывают его. В течение ряда лет многие математики в разных странах пытались доказать, что каждое пространственное тело можно разбить на четыре части меньшего диаметра. Это доказали в 1955—1957 гг. Г. Эглстон [93], Б. Грюнбаум [87] и А. Хеппеш [94].

Заметим еще, что К. Борсук [91] предположил также, что *каждое тело k-мерного евклидова пространства*[1]) *можно разбить на $k+1$ частей меньшего диаметра*; это, однако, в полной мере не доказано и до сегодняшнего дня (в частности, не доказано даже для k-мерных «выпуклых многогранников» — *политопов*). По этому поводу см. книгу В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга [17] (или вторую часть книги Б. Грюнбаума [19]), где подробно рассказано об имеющихся в настоящее время в этом направлении результатах и о связанных с этой проблематикой нерешенных задачах.

Обозначим теперь через $\delta=\delta(n, F)$ наименьшее такое число, что *фигуру F* (диаметр которой мы далее все время будем считать равным 1, т. е. условимся принимать за единицу длины) *можно разбить на n частей диаметра* $\leqslant\delta$; при этом предположение Борсука можно будет сформулировать как утверждение о том, что *для каждой плоской фигуры F* всегда $\delta(3, F)<1$, а *для каждой пространственной фигуры* Φ обязательно $\delta(4, \Phi)<1$. Такая постановка вопроса подсказывает также задачу определения наименьшего числа $\delta=\delta(n)$, такого, что *каждую* фигуру F диаметра 1 можно разбить на n частей диаметра $\leqslant\delta$:

$$\delta(n)=\min\delta(n, F), \quad \text{где} \quad d(F)=1 \text{ (здесь } d(F) \text{ — диаметр } F).$$

В этой задаче, впрочем, уместно различать планиметрический и стереометрический ее варианты, обозначая через $\delta_2(n)$ и $\delta_3(n)$ числа, полученные в предположении, что мы рассматриваем только плоские фигуры F или также и пространственные тела Φ. Отыскание характеристик $\delta(n, F)$ фигуры F представляет собой точную формулировку задачи о разбиении F на «возможно меньшие» части, где размеры частей определяются их *диаметрами*, а задача о величинах $\delta_2(n)$ и $\delta_3(n)$ (или даже о величинах $\delta_k(n)$, отвечающих задаче разбиения на части всевозможных k-мерных фигур F) — существенное уточнение проблемы Борсука, требующей лишь доказать, что

$$\delta_2(3)<1 \quad \text{и} \quad \delta_3(4)<1 \quad (\text{или даже, что } \delta_k(k+1)<1),$$

но не требующей установления точных значений соответствующих величин.

103. Пусть $Кр$, $Кв$ и $Тр$ — круг, квадрат и равносторонний треугольник диаметра 1. Докажите, что:

а) $\delta(1, Кр)=\delta(2, Кр)=1$; $\delta(3, Кр)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\approx 0,86$); $\delta(4, Кр)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\approx 0,71$); $\delta(5, Кр)=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ($\approx 0,59$); $\delta(6, Кр)=\delta(7, Кр)=\frac{1}{2}$ ($=0,5$) (другими словами, в этой задаче требуется доказать, что круг диаметра 1 нельзя разбить на две части, диаметр каждой из которых <1; его можно разбить на три части, диаметр каждой из

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 32.

которых $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, но нельзя разбить на три части диаметров $< \frac{\sqrt{3}}{2}$ и т. д.; при этом для простоты мы считаем, что все «части» круга и других рассматриваемых фигур сами представляют собой «связные» фигуры, т. е. не состоят из нескольких изолированных кусков).

б) $\delta(1, Кв) = 1$; $\delta(2, Кв) = \frac{\sqrt{10}}{4} (\approx 0{,}79)$; $\delta(3, Кв) = \frac{\sqrt{130}}{16} (\approx 0{,}71)$; $\delta(4, Кв) = \frac{1}{2} (= 0{,}5)$;

в) $\delta(1, Тр) = \delta(2, Тр) = 1$; $\delta(3, Тр) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\approx 0{,}58)$; $\delta(4, Тр) = \delta(5, Тр) = \frac{1}{2} (= 0{,}5)$.

Все результаты задачи 103 (и некоторые другие, заимствованные из статьи американского геометра Р. Л. Грехема [95], в которой вычислены все значения $\delta(n, Тр)$ для $n \leqslant 15$) собраны в таблице на стр. 97.

Но насколько приближают нас эти результаты к решению общей задачи определения (зависящих от фигуры F) величин $\delta(n, F)$ и величин $\delta(n)$ (точнее — $\delta_2(n)$, $\delta_3(n)$ и т. д.)? Почти не приближают — даже усмотреть из полученных результатов какие-либо содержательные факты, касающиеся бесконечных последовательностей чисел

$$\delta(n, Кр), \ \delta(n, Тр) \ \text{ и } \ \delta(n, Кв), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

мы не в состоянии, хотя, конечно, затратив некоторые усилия, мы смогли бы, вероятно, определить, скажем, еще и величины $\delta(8, Кр)$ или $\delta(5, Кв)$ [1]). Что же касается чисел

$$\delta_2(n), \quad \text{где} \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

[1]) Разумеется, полученные нами численные результаты иллюстрируют то обстоятельство, что величины $\delta(n, F)$, где роль фигуры F играют Круг $Кр$, Квадрат $Кв$ и равносторонний Треугольник $Тр$, убывают с ростом n, — но это вытекает из самого смысла рассматриваемых величин и не нуждается в доказательстве. Менее тривиальным является тот факт, что эти величины при переходе от n к $n+1$ убывают не всегда: так, $\delta(2, Кр) = \delta(1, Кр)$ и $\delta(7, Кр) = \delta(6, Кр)$; $\delta(2, Тр) = \delta(1, Тр)$, $\delta(5, Тр) = \delta(4, Тр)$ и $\delta(7, Тр) = \delta(6, Тр)$. Однако полученные нами результаты доставляют нам весьма мало информации о множествах

$$M_{Кр} = \{1, 6, \ldots\}, \quad M_{Тр} = \{1, 4, 6, \ldots\} \quad \text{и} \quad M_{Кв} = \{\ldots\}$$

таких номеров n, что $\delta(n, F) = \delta(n+1, F)$, где F — одна из рассматриваемых нами трех фигур; так, например, мы не знаем даже конечны ли эти множества или бесконечны (и не является ли множество $M_{Кв}$ пустым!).

Величины $\delta(n, F)$

$n \backslash F$	Kp	Tp	Ke
1	1	1	1
2	1	1	$\frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0,79$
3	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$	$\frac{\sqrt{130}}{16} \approx 0,71$
4	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$
5	$\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approx 0,59$	$\frac{1}{2} = 0,5$	. . .
6	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,37$	. . .
7	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,37$	. . .
8	. . .	$\frac{\sqrt{6\sqrt{3}} + 3\sqrt{2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} - 4}{4} \approx 0,34$	. . .
9	. . .	$\frac{1}{3} \approx 0,33$	. . .
10	. . .	$\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,28$	. . .
11	. . .	. . .	. . .

то результат задачи 103 позволяет лишь утверждать, что наряду с тривиальным равенством

$$\delta_2(1) = 1$$

(ибо, разумеется, $\delta(1, F) = 1$ при любой фигуре F!) имеет место также и более глубокое равенство

$$\delta_2(2) = 1. \qquad (!)$$

В самом деле, ведь $\delta_2(n) \geqslant \delta(n, F)$, где F — какая угодно (плоская!) фигура, и поскольку $\delta(2, Kp) = \delta(2, Tp) = 1$, то $\delta_2(2) \geqslant 1$, откуда и вытекает соотношение (!). Правда, найденные нами значения величин $\delta(n, Kp)$, $\delta(n, Tp)$ и $\delta(n, Кв)$ позволяют также установить, что, скажем,

$$\delta_2(3) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} (\approx 0{,}86),\ \delta_2(4) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} (\approx 0{,}71) \text{ и } \delta_2(7) \geqslant \frac{1}{2}\ (=0{,}5) \quad (!!)$$

(заметьте, что для оценок $\delta_2(3)$, $\delta_2(4)$ и $\delta_2(7)$ мы используем величины $\delta(n, Kp)$, которые — во всяком случае при $n = 3$, 4 и 7 — больше, чем $\delta(n, Tp)$ и при $n = 3$, 4 больше, чем $\delta(n, Кв)$, ибо $\delta_2(F) = \max\limits_F \delta(n, F)$, где F пробегает множество всех плоских фигур диаметра 1); однако в противоположность соотношению (!) эти результаты нельзя считать окончательными: ведь мы не можем быть уверены, скажем, в отсутствии такой плоской фигуры F диаметра 1, что $\delta(3, F) > \delta(3, Kp) \left(= \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Впрочем, что касается оценок (!!), то они на самом деле оказываются точными, как показывает следующая задача.

104*. Докажите, что каждую плоскую фигуру диаметра 1 можно разбить

а) на 3 части диаметра $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} (\approx 0{,}86)$;

б) на 4 части диаметра $\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} (\approx 0{,}71)$;

в) на 7 частей диаметра $\leqslant \frac{1}{2} (= 0{,}5)$.

Таким образом, имеем

$$\delta_2(2) = 1, \quad \delta_2(3) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \delta_2(4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \delta_2(7) = \frac{1}{2}. \qquad (!!!)$$

Однако помимо этих результатов, тривиального равенства

$$\delta_1(n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

в котором номер (или «индекс») 1 внизу указывает, что речь здесь идет о разбиении на части одномерных фигур, т. е. *отрезка*, и почти столь же очевидного соотношения [1])

$$\delta_k(n) = 1 \quad \text{при} \quad n \leqslant k,$$

пока неизвестно как будто ни одного точного значения величин $\delta(n)$.

Значение $\delta_2(3)$ было, по существу, найдено еще К. Борсуком [91] в 1932—1933 гг. (см. также Д. Гейл [86]); значения $\delta_2(4)$ и $\delta_2(7)$ вычислены в 1956 г. немецким геометром Г. Ленцом [96], тщательно изучившим вопрос о возможных значениях величин $\delta_2(n)$ при небольших n. Никакой существенной информации не доставляет нам и то обстоятельство, что во всех равенствах (!!!) имеем $\delta_2(n) = \delta_2(n, Kp)$ [2]): ранее высказывалось предположение, что $\delta_2(n) = \delta(n, Kp)$ при всех n (и даже что $\delta_3(n) = \delta_3(n, Ш)$, где $Ш$ — шар, а также, что эта закономерность распространяется и на многомерные пространства), но эти гипотезы в дальнейшем не подтвердились. И сегодня мы не знаем даже, существует ли хоть одно отличное от 1, 2, 3, 4 и 7 значение n такое, что $\delta_2(n) = \delta(n, Kp)$ — во всяком случае последнее равенство не выполняется при $n = 5$ и $n = 6$ (попытайтесь сами это доказать!).

Из принадлежащих А. Хеппешу [94] и Б. Грюнбауму [87] решений *стереометрического* варианта проблемы Борсука вытекают оценки: $\delta_3(4) < 0{,}998$ и $\delta_3(4) < 0{,}989$; однако даже и последняя из этих оценок заведомо не является точной. Неоднократно высказывалось предположение (см. Д. Гейл [86], Г. Хадвигер [97]), что

$$\delta_3(4) = \delta(4, Ш) = \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{6} \quad (\approx 0{,}888; \quad \text{точное значение } \delta(4, Ш)$$

было определено Г. Хадвигером [97]); однако это предположение пока никем не доказано (но и не опровергнуто). Можно было бы также предположить, что и при $k > 3$ имеет место равенство $\delta_k(k+1) = \delta(k+1, Ш^{(k)})$, где $Ш^{(k)}$ — (k-мерный!) *шар*, однако, помимо того, что мы еще не имеем достаточных аргументов для обоснования этой гипотезы, само это предположение мало что

---

[1]) Оно вытекает, например, из существования в k-мерном евклидовом пространстве так называемого *правильного симплекса* (аналог правильного треугольника на плоскости или правильного тетраэдра в пространстве), имеющего $k+1$ вершин, каждые две из которых удалены одна от другой на расстояние 1 (см. подстрочное примечание на стр. 32).

[2]) Заметим также, что и сами установленные нами равенства $\delta_2(1) = \delta(1, Kp)$, $\delta_2(2) = \delta(2, Kp)$, $\delta_2(3) = \delta(3, Kp)$, $\delta_2(4) = \delta(4, Kp)$ и $\delta_2(7) = \delta(7, Kp)$ имеют совершенно разный характер: в самом деле, $\delta_2(1) = \delta(1, F)$ для любой (плоской) фигуры F (а поэтому, конечно, и для круга!); $\delta_2(2) = \delta(2, F)$ для ряда плоских фигур F, в том числе для круга Kp (и для правильного треугольника Tp); в то же время равенства $\delta_2(3) = \delta(3, F)$, $\delta_2(4) = \delta(4, F)$ и $\delta_2(7) = \delta(7, F)$ из всех плоских фигур выполняются только для $F \equiv Kp$ (докажите это!).

может дать, поскольку значения величин $\delta(k+1, Ш^{(k)})$ не известны пока ни при каком $k > 3$ [1]).

По поводу других не решенных до сих пор задач, связанных с проблемой Борсука, см. В. Г. Болтянский и И. Ц. Гохберг [17] и Б. Грюнбаум [19].

В заключение укажем, что и основные для этого цикла задачи 103 и 104 (да и многие предшествующие им) также имеют привычную нам уже «минимаксную» форму. В самом деле, число $\delta(n, F)$, например, можно описать следующим образом. Для каждого фиксированного разбиения $\mathscr{R}_n$ фигуры F на n частей $f_1, f_2, \ldots, f_n$ мы определяем число

$$\delta(\mathscr{R}_n) = \max_i d(f_i); \quad i = 1, 2, 3, \ldots \text{ или } n,$$

где $d(f)$ — *диаметр* фигуры f; далее, рассматривая всевозможные разбиения F на n частей, мы ищем величину

$$\delta(n, F) = \min_{\mathscr{R}_n} d(\mathscr{R}_n) = \min_{\mathscr{R}_n} \max_i d(f_i).$$

Наконец, характеристика $\delta_2(n)$ множества $\mathfrak{M}_2(1) = \mathfrak{M}_2$ всех плоских (двумерных) фигур F диаметра 1 определяется так:

$$\delta(n) = \max_{F \in \mathfrak{M}_2} \delta(n, F) = \max_F \min_{\mathscr{R}_n} \max_i d(f_i).$$

Аналогично этому минимаксную форму имеют и задачи, связанные с проблемой Лебега (см. выше задачи 93—100). Так, например, задачу о *круге Юнга* (см. задачу 93 б)) можно сформулировать так. Радиус Описанного круга K фигуры F может быть определен как радиус R наименьшего круга $K = K(O, \rho)$ (где O — центр K, а ρ — его радиус), содержащего F внутри себя:

$$R = \min \rho, \quad \text{где} \quad K(O, \rho) \supset F$$

(здесь $\supset$ — теоретико-множественный знак *включения* одного множества в другое; запись $K \supset F$ читается так: «фигура F, понимаемая как множество точек, целиком принадлежит кругу K»). После этого радиус $R_0 \left(= \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ круга Юнга определяется как

$$R_0 = \max_{F \in \mathfrak{M}_2(1)} R = \max_F \min_K \rho, \quad K(O, \rho) \supset F, \quad F \in \mathfrak{M}_2(1),$$

где $\mathfrak{M}_2(1)$ — совокупность всевозможных плоских «двумерных» фигур диаметра 1 [2]).

[1]) Известно лишь, что $\delta(k, Ш^{(k)}) = 1$, в то время как $\delta(k+1, Ш^{(k)}) < 1$ (Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман [98], К. Борсук [91]; по поводу элементарной трактовки соответствующего факта в случае $k = 3$, т. е. в случае обычного трехмерного пространства, см. Добавление к разделу I книги Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского [99]).

[2]) Можете ли вы записать в «минимаксной» форме задачу о *круге Бляшке* (задача 100); другие задачи этого цикла?

6. ЗАДАЧИ О РАСПОЛОЖЕНИИ ТОЧЕК И ФИГУР

Задачи, собранные в этом небольшом цикле, по своему характеру весьма близки к задачам цикла 5, что объясняется принадлежностью задач обоих этих циклов к *комбинаторной геометрии* (см. Предисловие). Также и дополнительная литература, которую можно порекомендовать читателю, желающему глубже познакомиться с тематикой, намеченной собранными ниже задачами, в основном совпадает с указанной в начале цикла 5 (помимо перечисленных там книг и статей, мы назовем еще обзор [26] и статью [23]). Сравнительная ограниченность числа задач этого цикла связана, скорее, с богатством представленной им проблематики, чем с ее бедностью: стремление к полноте здесь невозможно, и потому собранные ниже задачи могут служить лишь представителями обширного круга проблем, весьма многие из которых пока не решены.

105. Сколько кругов радиуса 1 можно приложить[1]) к данному единичному кругу K так, чтобы

а) никакие два из этих кругов не пересекались;

б) ни один из кругов не содержал внутри себя центр другого;

в)* сколько кругов радиуса 1 можно расположить на плоскости так, чтобы все они пересекали данный единичный круг K, но ни один из них не содержал центр K или центр какого-либо еще из рассматриваемых кругов?

Задачи 105 а) — в) можно перенести и в стереометрию, задавая вопрос о *наибольшем возможном числе единичных шаров, которые можно приложить к равному им всем шару* K *с тем, чтобы эти шары не пересекались между собой*, соответственно чтобы *ни один из шаров не содержал центра другого* (сформулируйте сами стереометрический вариант задачи 105 в)). Эти вопросы не кажутся особенно трудными; особенно просто и естественно звучит первый из них, который можно воспринимать как вопрос *о наибольшем числе материальных* (скажем, биллиардных или крикетных) *шаров, которые можно приложить к равному им всем шару*. Историю соответствующей задачи, неожиданно оказавшейся весьма трудной и в течение ряда столетий (!) не поддававшейся никаким попыткам решить ее, ведут обычно от знаменитого Иоганна К е п л е р а [100], указавшего в 1611 г. такое расположение материальных шаров в пространстве, при котором каждый шар касается *двенадцати* своих «соседей». С другой стороны, несложные, хоть и несколько громоздкие рассуждения, базирующиеся на использовании формул и теорем «геометрии на поверхности шара» (*сферической геометрии*) доказывают, что к шару никак н е л ь з я приложить *четырнадцать* или

[1]) Плоские (и расположенные, разумеется, в одной плоскости) фигуры F и F_1 называются *приложенными* друг к другу, если они не имеют общих в н у т р е н н и х точек, но их границы соприкасаются (т. е. F и F_1 имеют хоть одну общую г р а н и ч н у ю точку).

больше равных ему непересекающихся («материальных») шаров (эти рассуждения приведены, например, в книге Л. Фейеш Тот [24]).

Таким образом, поставленный вопрос сводится к выяснению того, *можно ли приложить к шару К тринадцать равных ему непересекающихся шаров* или нельзя, — и именно этот вопрос, получивший название проблемы 13 шаров, оказался вовсе не простым. В 1694 г. по этому поводу развернулась даже довольно оживленная полемика: известный английский естествоиспытатель того времени Девид Грегори с азартом утверждал, что 13 шаров к шару приложить можно, а его оппонент, гениальный Исаак Ньютон, настаивал, что нельзя, — но доказать свою правоту ни тому ни другому (да, и Ньютону тоже!) не удалось. По-видимому, первое решение поставленного вопроса — а именно доказательство правоты Ньютона — было дано лишь в 1874 г. (т. е. через 180 лет после дискуссии Ньютон — Грегори!) немецким геометром Рудольфом Гоппе: это решение было опубликовано в статье [101] другого немецкого математика К. Бендера. Годом позже решение Гоппе было еще усовершенствовано его соотечественником С. Гюнтером [102]. Однако весьма сложные и запутанные рассуждения Гоппе — Гюнтера, напечатанные к тому же в малоизвестном и труднодоступном журнале, не приобрели популярности, и многие специалисты по этим вопросам (например, один из первых авторитетов в рассматриваемой области Л. Фейеш Тот) склонны считать, что первое удовлетворительное решение задачи дали в 1953 г. (через 259 лет после дискуссии Ньютон — Грегори!) наши современники — знаменитый голландский алгебраист Бартель Леенберт ван дер Варден и неоднократно упоминавшийся в этой книге немецкий логик Карл Шютте [103]. Несколько более простое (но все еще достаточно сложное!) доказательство того же факта предложил не так давно английский геометр Джон Лич [104][1]).

106. Каково наибольшее число квадратов, со стороной 1, которые можно приложить к данному единичному квадрату K так, чтобы никакие два из них не пересекались?

Венгерский геометр Ласло Фейеш Тот [106] предложил в память знаменитой дискуссии Ньютон — Грегори (правым в которой оказался все же Ньютон!) называть ньютоновым числом (выпуклой) фигуры F *наибольшее число* $n(F)$ *равных* F *фигур, которые можно приложить к* F *так, чтобы никакие две из них не пересекались*; таким образом, задачу 106 можно сформулировать как вопрос о ньютоновом числе *квадрата*. Ясно, что ньютоново число «достаточно вытянутой» плоской фигуры может быть сколь угодно большим (рис. 48); поэтому никаких оценок сверху ньюто-

[1]) Для k-мерных евклидовых пространств, где $k \geqslant 3$, соответствующая задача еще не решена; по поводу имеющихся результатов см., например, статью [105] известного канадского геометра Гарольда Скотта Макдональда Коксетера (или Кокстера, как неправильно принято у нас писать).

новых чисел всех плоских фигур указать нельзя [1]), и смысл имеют лишь задачи, связанные с определением ньютоновых чисел конкретных фигур. Так, в 1965 г. учащимся математической школы № 2 при Московском университете была предложена задача определения ньютонова числа *правильного треугольника* (см. [109]) — и эту задачу тогда же решило несколько школьников. Позже сходной

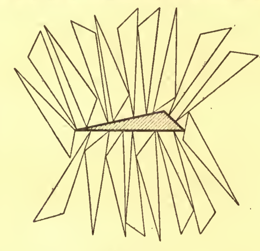


Рис. 48.

задачей определения ньютоновых чисел *правильных многоугольников* занимался венгерский геометр К. Бёрёцкн [110], который определил эти числа для всех n-угольников, где $n \neq 5$.

Трудность задачи определения ньютоновых чисел (выпуклых) фигур повлекла попытки модификации и упрощения этой задачи.

107. Чему равно наибольшее возможное число непересекающихся одинаковых и параллельно друг другу расположенных

а) треугольников,

б) квадратов,

которые можно приложить к равной им и параллельно им расположенной фигуре F?

---

[1]) Оценка снизу дается неравенством $n(F) \geqslant 6$, вытекающим из работы Г. Хадвигера [107], о которой мы еще скажем ниже. Оценки ньютонова числа $n(F)$ (плоской, выпуклой) фигуры F в зависимости от ее «степени вытянутости» (которую можно характеризовать, например, отношением $d(F):\Delta(F)$, где $d(F)$ — диаметр фигуры F, а $\Delta(F)$ — ее ширина; см. выше, стр. 69 и 92, в частности рис. 32, *б* и 46) были даны Л. Фейешем Тотом [108].

Задача 107 является совсем несложной — дополнительное требование о том, чтобы прикладываемые к F фигуры не только были равны F, но также и параллельно F расположены (т. е. получались из F не произвольным *движением* δ, а обязательно *параллельным переносом* π — ср. рис. 49, *а* и *б*) сильно сокращает количество возможных вариантов расположения фигур и тем весьма упрощает задачу. Эта модификация «задачи Ньютона — Грегори» [1])

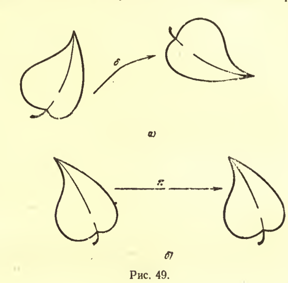


Рис. 49.

ведет свое начало, как будто, от видного швейцарского геометра Гуго Хадвигера [107]; поэтому соответствующее число $h(F)$ можно было бы назвать числом Хадвигера (выпуклой) фигуры F. Г. Хадвигер [107] доказал, что *для всех плоских выпуклых* [2]) *фигур* F

$$6 \leqslant h(F) \leqslant 8;$$

он предположил также, что $h(F) = 8$ только для *параллелограмма* (четырьмя годами позже это доказали Г. Грёмер [111] и Б. Грюнбаум [112]). Наибольших успехов добился здесь Бранко

---

[1]) Заметим, впрочем, что первоначальную задачу об определении числа кругов или шаров, которые можно приложить к равной им всем фигуре F, можно рассматривать и как модифицированную указанным образом проблему, поскольку каждый равный кругу (или шару) K круг (или шар) можно получить из K параллельным переносом.

[2]) По поводу задачи оценки «числа Хадвигера» для не обязательно выпуклых плоских фигур см. К. Хальберг, Е. Левин, Е. Страус [113].

Грюнбаум [112], установивший, что *для пространственных (выпуклых) тел* [1] Ф

$$12 \leqslant h(\Phi) \leqslant 26,$$

причем оба крайних значения достигаются: $h(\Phi) = 12$, например, для *тетраэдра* (треугольной пирамиды) Ф, а $h(\Phi) = 26$ для *параллелепипеда* (и только для параллелепипеда). Б. Грюнбаум установил также, что для пространственных выпуклых тел Ф число Хадвигера $h(\Phi)$ может иметь все *четные* значения в пределах $12 \leqslant h(\Phi) \leqslant 26$ (соответствующие примеры строятся довольно просто, — как?) и предположил, что $h(\Phi)$ может иметь только четные значения (последнее пока еще, как будто, не доказано).

108. Пусть дан круг K радиуса 1 и круги K_1, K_2, K_3, ..., меньшие круга K. Докажите, что

а) наименьшее число кругов K_1, K_2, ..., которыми можно покрыть круг K, всегда $\geqslant 3$;

б) если радиусы кругов K_1, K_2, ... меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то это число будет $\geqslant 4$;

в) если радиусы кругов K_1, K_2, ... меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$, то это число $\geqslant 5$.

Можно ли улучшить оценки задач а)—в)?

109. Докажите, что наименьшее число одинаковых кругов K_1, K_2, K_3, ..., которыми можно покрыть круг K вдвое большего радиуса, равно 7.

Здесь мы снова сталкиваемся с типичными для настоящей книги минимаксными постановками задач. Задачи 108, 109 можно понимать как задачи о «наиболее экономных» покрытиях данного (скажем, единичного) круга K равными кругами, где прилагательному «экономный» следует придавать следующий точный смысл. Мы рассматриваем всевозможные покрытия $\mathcal{P}_n$ круга K заданным числом n (вообще говоря, меньших) кругов K_1, K_2, ... радиусов R_1, R_2, ... и каждое такое покрытие характеризуем максимальным радиусом

$$R(\mathcal{P}_n) = \max_i R_i, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \text{ или } n,$$

использованных в нем кругов. Далее мы ищем то из рассматриваемых покрытий $\mathcal{P}_n$, которому отвечает наименьшее возможное

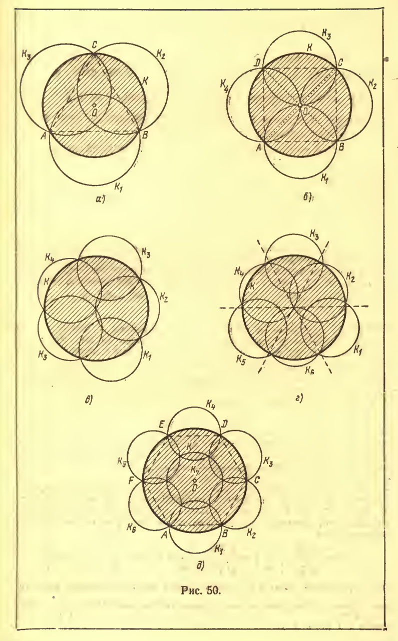
[1]) Для k-мерных (выпуклых) тел F Г. Хадвигер [107] получил оценку $h(F) \leqslant 3^k - 1$; Б. Грюнбаум [112] установил, что в этом случае $k^2 + k \leqslant h(F) \leqslant 3^k - 1$, где оба крайних значения достигаются.

значение
$$R(n) = \min_{\mathcal{P}_n} R(\mathcal{P}_n) = \min_{\mathcal{P}_n} \max_i R_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$\mathcal{P}_n = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$$
«радиуса кругов покрытия» $R(\mathcal{P}_n)$.

Из самого смысла величин $R(n)$ следует, что $R(1) = 1$ (напомниаем, что радиус круга K мы принимаем за единицу длины). Из результата задачи 108 а) вытекает, что также и $R(2) = 1 (= R(1))$. Далее, величины $R(3)$ и $R(4)$ определяются результатами задач 108 б) и в):
$$R(3) = \frac{\sqrt{3}}{2} (\approx 0{,}866) \quad \text{и} \quad R(4) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\approx 0{,}707);$$
на рис. 50, *а* и *б* изображены системы n кругов (где $n = 3$ и 4), отвечающие этим значениям радиусов «кругов покрытия». Наиболее экономное покрытие круга *пятью* равными кругами определил в 1915 г. английский математик Э. Невиль [114]; оно изображено на рис. 50, *в*, и ему отвечает значение
$$R(5) \approx 0{,}609.$$
Неоднократно упоминавшийся в этой книге Б. Грюнбаум (частное сообщение) предполагает, что «наиболее экономным» покрытием круга K *шестью* (равными) кругами является то, которое изображено на рис. 50, *г*; если это предположение (доказать которое Грюнбауму пока не удалось) верно, то
$$R(6) \approx 0{,}557.$$
Наконец, из решения задачи 109 вытекает, что
$$R(7) = \frac{1}{2} (= 0{,}5)$$
(рис. 50, *д*). Однако какой характер имеет общая зависимость числа $R(n)$ от номера n? Как вычислять (точно или приближенно) величины $R(n)$ при $n > 7$; чему равно, например, число $R(8)$? Как описать множество таких номеров n, что
$$R(n) = R(n+1);$$
какие еще натуральные числа, кроме $n = 1$, входят в это множество (и есть ли такие числа)? Как оценить величину $R(n)$, если номер n сравнительно велик? На все эти вопросы, кроме, пожалуй, последнего [1]), мы пока ответа не имеем.

---

[1]) Некоторую информацию, относящуюся к этому последнему вопросу, вдумчивый читатель сумеет извлечь из гл. III книги Л. Фейеша Тота [24] или из Введения к книге К. А. Роджерса [25]; так, например, из изложенных в этих книгах результатов вытекает, что
$$R(n) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{27}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{27}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{P}(n) \approx \frac{1{,}1}{\sqrt{n}} + \mathrm{P}(n) \right),$$
где «остаточный член» $\mathrm{P}(n)$ имеет «более высокий порядок малости чем $\frac{1}{\sqrt{n}}$» в том смысле, что предел отношения $\mathrm{P}(n) : \frac{1}{\sqrt{n}}$ стремится к 0 при $n \to \infty$.



C
K3
K2
K
O
A
B
K1
а)
K3
K
D
C
K4
K2
O
A
B
K1
б)
K4
K3
K
K2
K3
K1
в)
K3
K4
K2
K
K5
K6
K1
г)
K4
E
D
K
K5
K3
K7
F
O
C
K6
A
B
K2
K1
д)

Рис. 50.

Проблематнка следующей задачи является в определенном смысле «двойственной» постановке вопроса, характерной для задач 108, 109.

• **110.** Дан круг K радиуса 1 и круги $k_1, k_2, k_3, \ldots$ радиусов $r_1, r_2, r_3, \ldots$, меньшие круга K. Докажите, что

а) если все радиусы $r_i > \frac{1}{2}$ (здесь $i = 1, 2, 3, \ldots$), то в круг K нельзя заключить двух кругов k_i так, чтобы они не пересекались между собой;

б) если все $r_i > 2\sqrt{3} - 3$, то в K нельзя заключить трех кругов k_i так, чтобы никакие два из них не пересекались между собой,

причем далее улучшить оценки задач а), б) нельзя: в K можно заключить два непересекающихся круга радиуса 1/2, соответственно три круга радиуса $2\sqrt{3} - 3$.

В этой задаче нщутся всевозможные *заполнения* $\mathcal{S}_n$ круга K непересекающнмися кругамн $k_1, k_2, \ldots, k_n$ меньшего раднуса; прн этом нас нитересует «нанболее экономное» заполиение круга K кругамн $k_1, k_2, \ldots, k_n$, т. е. заполненне K кругамн раднуса $r(n)$, где

$$r(n) = \max_{\mathcal{S}_n} \min_i r_i, \quad i = 1, 2, \ldots \text{ илн } n; \quad \mathcal{S}_n = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}.$$

Нанболее экономные в этом смысле заполнения K *двумя, тремя, четырьмя, пятью* н *семью* кругами нзображены на рнс. 51, *а* — *д*, нз которых (н из решення задачн 110, связанной с первымн двумя нз зтнх рнсунков) можно усмотреть, что:

$$r(1) = 1 \text{ (это очевидно!)};$$

$$r(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5;$$

$$r(3) = 2\sqrt{3} - 3 \ (\approx 0{,}464);$$

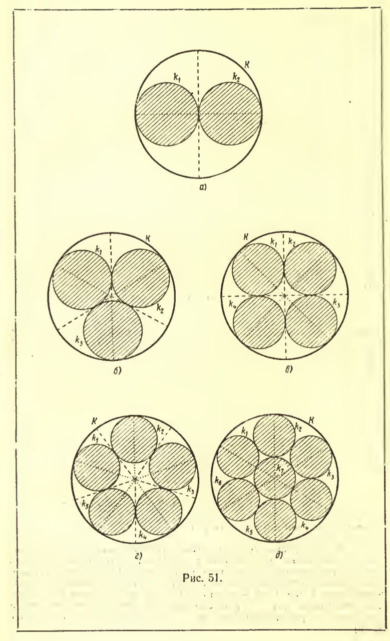
$$r(4) = \sqrt{2} - 1 \ (\approx 0{,}414);$$

$$r(5) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \ (\approx 0{,}370);$$

$$r(6) = r(7) = \frac{1}{3} \ (\approx 0{,}333)$$

(сможете вы самн это доказать?) [1]).

[1]) Конфнгурацию, образованную n однннаковымн кругамн, «нанболее экономно» заполняющимн большнй круг, легко получнть «экспериментально» — достаточно рассмотреть, как расположатся n одннаковых круглых карандашей, туго стянутых веревкой нли резиновой лентой (ср. С. Кравнтц [115], где указаны самые экономные заполнення круга n равными кругами прн $n \leqslant 19$; см. также связанную с рассматрнваемой здесь тематикой статью К. Цана [116]).


K
k_1
k_2
а)
K
k_1
k_2
k_3
б)
K
k_1
k_2
k_3
k_4
в)
K
k_1
k_2
k_3
k_4
k_5
г)
K
k_1
k_2
k_3
k_4
k_5
k_6
k_7
д)
Рис. 51.

С величинами $r(n)$ связаны почти те же вопросы, что и с величинами $R(n)$ [1]); так, например, несколько неожиданное равенство $r(6) = r(7)$ делает содержательной задачу описания множества таких значений n, для которых $r(n) = r(n+1)$.

Разумеется, относящиеся к кругам задачи 108—110 можно переносить и на шары *в пространстве* [2]); кроме того, можно видоизменять и планиметрические их варианты, заменяя круги какими-либо другими фигурами. При этом здесь возможны разные постановки «видоизмененной» задачи, поскольку можно заменить фигурами иной формы как «основной» круг K, так и покрывающие K (или заполняющие K) круги (вместо которых в этом случае естественно рассматривать фигуры, имеющие т у ж е ф о р м у, что и «основная фигура» K) или рассматривать вопрос о покрытии или заполнении отличной от круга фигуры F *кругами.* При этом в случае, скажем, *покрытия* фигуры F меньшими F и подобными F фигурами $f_1, f_2, f_3, \ldots$ мы (в соответствии со сказанным на стр. 104 в связи с задачами о «прикладывании» фигур) можем считать $f_1, f_2, \ldots$ только п о д о б н ы м и F (получаемыми из F произ-

---

[1]) Так результаты гл. III книги [24] (см. также Введение к книге [25]) позволяют заключить, что справедлива следующая «асимптотическая» (т. е. позволяющая оценить величину $r(n)$ при большом n) формула:

$$r(n) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{12}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{12}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \rho(n) \approx \frac{0{,}95}{\sqrt{n}} + \rho(n) \right),$$

где $\rho(n)$ имеет более высокий порядок малости чем $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (ср. со сноской на стр. 106).

[2]) Если обозначить фигурирующие в *стереометрических* вариантах задачи о покрытии круга n меньшими кругами и о заполнении круга n кругами величины через $R_3(n)$ и $r_3(n)$ (где индекс 3 снизу обозначает, что здесь эти величины являются радиусами трехмерных *шаров*), то из сообщаемых в гл. VII книги [24] и во Введении к книге [25] результатов (которые, видимо, верны, хотя их пока никому не удалось доказать!) следуют «асимптотические» формулы

$$R_3(n) = \frac{\sqrt{5}\,\sqrt[3]{\pi}}{2\sqrt[3]{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots \approx \frac{2{,}24}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

и

$$r_3(n) = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots \approx \frac{0{,}84}{\sqrt[3]{n}} + \ldots,$$

в которых точками обозначены члены, имеющие более высокий порядок малости чем $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

вольным *преобразованием подобия* δ; рис. 52, *а*) или подобными *F* и параллельно *F* расположенными (получаемыми из *F* *гомотетией* γ; рис. 52, *б*).

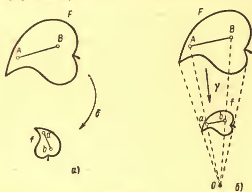


Рис. 52.

Первый из вопросов, возникающих в связи с задачами *покрытия* (плоской!) фигуры *F* подобными ей и параллельно расположенными фигурами, оказывается не слишком сложным.

111. Докажите, что каждый отличный от параллелограмма выпуклый многоугольник *M* можно заключить в треугольник *T*, полученный продолжением трех сторон *M* (рис. 53).

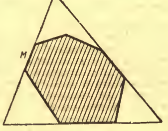


Рис. 53.

112*. Докажите, что каждый отличный от параллелограмма многоугольник *M* можно покрыть тремя подобными *M* и параллельно *M* расположенными многоугольниками (но нельзя покрыть двумя такими многоугольниками!); для параллелограмма же *P* наименьшее число меньших *P* и параллельно *P* расположенных параллелограммов, которыми можно покрыть *P*, равняется четырем.

Результат задачи 112 (верный не только для многоугольников, но и для произвольных *плоских выпуклых фигур*) получил название теоремы Гохберга — Маркуса (см. [117]; в несколько иной форме тот же результат получил немецкий геометр Ф. Леви [118]). Бесспорный интерес представляет *стереометрический* вариант

теоремы Гохберга — Маркуса, где можно ожидать, что наименьшее возможное число $g(\Phi)$ фигур, меньших данной пространственной выпуклой фигуры Φ (например, выпуклого многогранника), подобных Φ и параллельно Φ расположенных, которыми можно полностью покрыть Φ, для разных фигур (разных многогранников) колеблется между 4 (оно равно четырем для треугольной пирамиды — *тетраэдра*) и 8 (оно равно восьми для *параллелепипеда* — и, видимо, только для него). Однако эта скорее всего справедливая теорема, впервые сформулированная, как будто, еще в 1957 г. Г. Хадвигером [119], до сих пор никем не доказана (по этому поводу см., например, книгу В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга [17]) [1]).

Что же касается задачи покрытия плоской фигуры (скажем, выпуклого многоугольника) F меньшими F и подобными F, но не обязательно параллельно F расположенными фигурами, то здесь просто решается следующая задача.

113. Докажите, что каждый плоский выпуклый многоугольник M может быть покрыт тремя меньшими M и подобными M многоугольниками.

Однако исчерпывающего ответа на вопрос о минимальном числе подобных M и меньших M фигур, которыми можно полностью покрыть M, теорема задачи 113 не дает: ясно лишь, что это число равно *двум или трем*, но нельзя сказать, для каких многоугольников оно равно двум, а для каких трем. Полное описание класса выпуклых многоугольников (или, общée, плоских выпуклых фигур), для которых это число равно, скажем, *двум*, дать, видимо, совсем не просто, хотя можно, например, доказать, что *наименьшее число меньших* *треугольника* / *прямоугольника* *M и подобных M многоугольников, которыми можно полностью покрыть M, равно* 3, *если M есть правильный* *треугольник,* / *прямоугольник,* *и равно* 2 *в противном случае* (см., например, [20]; разумеется, «правильный прямоугольник» — это *квадрат*).

Ясно, что приведшая к постановке последних задач модификация «проблем о покрытии фигур», сводящаяся к замене «основного» круга K произвольной (выпуклой) фигурой F, допускает и варианты (или точнее — обобщения), связанные с ограничением размеров покрывающих F фигур. Так, например, имеет смысл задача определения *такого наименьшего числа* $g = g(k, F)$, *что заданную фигуру F можно покрыть g фигурами* $f_1, f_2, \ldots, f_g$, *подобными F с коэффициентом подобия* $\leqslant k$ и *параллельно F расположенными* (т. е. гомотетичными F); можно также в последней задаче отбросить требование параллельного F расположения фигур $f_1, f_2, \ldots$, сохранив лишь требование их подобия исходной фигуре F и (задаваемое выбранным числом k) ограничение их

[1]) В самое последнее время кишиневский математик П. С. Солтан [120] доказал, что сформулированное предложение верно для одного частного класса центрально симметричных выпуклых многогранников, — это пока является самым сильным результатом в данном направлении.

размеров[1]). Близкая к сформулированной выше, но все же не совсем эквивалентная ей задача получится, если мы, напротив, *зададим заранее значение числа g покрывающих F* (и подобных F или подобных F и параллельно F расположенных) *фигур* $f_1, f_2, \ldots, f_g$, *а искать будем наибольшее возможное значение k, такое, что коэффициенты подобия* f_1 *и* F, f_2 *и* F, ..., f_g *и* F *могут быть все не больше k*. Наконец, в определенном смысле «двойственными» сформулированным являются задачи *о заполнении* F непересекающимися (подобными F, или гомотетичными F) фигурами $f_1, f_2, \ldots$, причем здесь можно поставить, скажем, задачу *определения такого наибольшего возможного числа* $e = e(k, F)$, *что в* F *поместятся e непересекающихся фигур* $f_1, f_2, \ldots, f_e$, *каждая из которых подобна* (*или гомотетична*) F *с коэффициентом подобия, не меньшим заданного заранее числа* k[2]). Однако все такие задачи (их частными случаями являются задачи 108—110), вообще говоря, довольно сложны, и мы пока обладаем по их поводу весьма скромной информацией (ср. [20]).

Вот, наконец, еще одна задача о покрытии фигур.

114*. Каково наименьшее число полос ширины 1, которыми можно полностью покрыть круг радиуса R (рис. 54)?

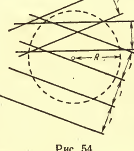


Рис. 54.

Задача 114 составляет частный случай следующей более общей «проблемы дощечек», которую поставил в 1932 г. известный польский математик А. Тарский: *каково наименьшее число полос ширины h* («*дощечек*»), *которыми можно покрыть произвольную плоскую фигуру F* («яму»). Любопытно отметить, что проблема эта оказалась достаточно трудной, и в течение многих лет ее решение было известно только для случая круглой «ямы» (т. е. для случая, который составляет содержание задачи 114); даже для случая, скажем, треугольной «ямы» не было известно никаких подходов к ее решению. «Проблему дощечек» впервые решил в 1950 г. молодой датский математик Т. Банг [119]; впоследствии это решение несколько раз упрощалось и обобщалось (см. [120], а также информацию [121] о работах [119], [120]).

Обращаясь теперь к задачам о покрытии (более или менее произвольной) фигуры F *кругами* радиуса 1 или иного фиксированного радиуса и о заполнении F *кругами*, мы начнем со следующей несложной задачи, примыкающей к проблематике предыдущего цикла задач.

---

[1]) Разумеется, здесь имеет смысл считать, что $0 < k < 1$: легко понять, что $g(k, F) = 1$ при всех $k \geqslant 1$ (и всех F).

[2]) И здесь интерес представляет определение величин $e(k, F)$ лишь при $0 < k < 1$: очевидно, что $e(1, F) = 1$ и $e(k, F) = 0$ при всех $k > 1$ (и всех фигурах F).

115. Какие значения может иметь наименьшее возможное число кругов диаметра 1, которыми можно полностью покрыть

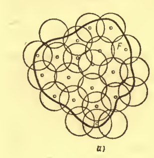
а) треугольник;

б)* выпуклый многоугольник

диаметра 1?

Здесь тоже возникает содержательная задача эффективного описания тех фигур (не обязательно многоугольников), для которых рассматриваемое в задаче 115 число имеет то или иное к о н к р е т н о е значение; эта задача легко решается для треугольников (см. решение задачи 115 а)), но для произвольных плоских фигур (или даже для произвольных выпуклых многоугольников) она, видимо, вовсе не проста. По поводу перенесения результатов задачи 115 в геометрию в пространстве (или даже в k-мерную геометрию) см., например, [20].

Наконец, заметим, что, скажем, задаче о покрытии (выпуклой) фигуры F наименьшим возможным числом кругов радиуса R и «двойственной» ей задаче о помещении в F наибольшего возможного числа непересекающихся кругов радиуса r можно придать форму вопросов о наиболее «рациональном» с определенной точки зрения размещении внутри F конечной системы т о ч е к — центров этих кругов. При этом, если считать число кругов заданным, а подлежащей определению, напротив, возможную величину радиусов этих кругов, то в задаче о *покрытии* области F кругами $K_1, K_2, \ldots, K_n$ с центрами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ и радиусами $\leqslant R$ (рис. 55, *а*)



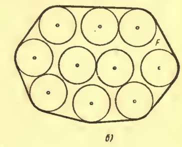


Рис. 55.

расположение точек $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ должно быть таким, чтобы *каждая точка области F была удалена* н е б о л е е ч е м н а *R хоть от одной* из этих *точек*; другими словами, ищется величина

$$R(n) = \min_{\mathscr{P}_n} \max_{A} \min_{i} AQ_i, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$A \in F;\ \mathscr{P}_n = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$$

(так как это число существенно зависит от выбора области F, то более правильно было бы писать здесь $R(n, F)$). Аналогично этому в задаче о *заполнении* области F кругами $k_1, k_2, \ldots, k_n$ с центра-

ми $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и радиусами $\geqslant r$ (рис. 55, *б*) нам требуется, чтобы *расстояние между каждыми двумя из точек* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *было не меньше* $2r = d$, т. е. здесь ищется величина

$$d(n) = \max_{\mathcal{P}_n} \min_{i, j} Q_iQ_j, \quad \text{где} \quad i, j = 1, 2, \ldots n;$$

$$\mathcal{P}_n = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}; \quad \text{все} \quad Q_i \in F.$$

Л. Фейеш Тот во втором издании книги [24] формулирует эти задачи как задачу об n связанных союзом диктаторах, резиденции которых надо так расположить в подвластной им области F, чтобы их контроль над F был возможно более полным, т. е. чтобы наибольшее из расстояний от точки области F до ближайшей резиденции было возможно меньшим, и задачу об n враждующих диктаторах, наименьшее из расстояний между резиденциями которых желательно, наоборот, сделать возможно большим; в математической литературе вторая из этих задач получила также выразительные названия «задачи о враждующих братьях», или «задачи об n мизантропах». Наряду с этим первую из поставленных задач вполне можно представлять себе как вопрос о наиболее рациональном распределении на площади F, скажем, n киосков с мороженым, где естественно стремиться к тому, чтобы наибольшее расстояние от точки площади до ближайшего киоска было возможно меньше (ср. ниже задачу 117), а вторую задачу, — например, как вопрос о рациональной посадке деревьев в саду F, где уместно добиваться, чтобы наименьшее из расстояний между корнями деревьев было возможно большим. Укажем еще, что соответствующие задачи естественно переносятся в стереометрию или, скажем, на поверхность сферы (ср. ниже задачу 120; Л. Фейеш Тот [24], формулируя эти задачи, предполагает, что «диктаторы» живут на шарообразной планете, которая полностью им подвластна).

Естественно, что постановки соответствующих задач можно также «вывернуть наизнанку», считая, напротив, заданными величины R, соответственно r, а отыскивая *наибольшее возможное число* $n = n(r, F)$ *непересекающихся кругов радиуса* $\geqslant r$, *которые можно разместить в заданной области* F, соответственно *наименьшее возможное число* $\nu = \nu(R, F)$ *кругов радиуса* $\leqslant R$, *которыми можно полностью покрыть фигуру* F (см. те же рис. 55, *а*, *б* на стр. 114). Имеют смысл и некоторые «комбинированные» задачи, в которых участвуют сразу оба числа n и ν и требуется установить связь между ними; в качестве примера здесь можно назвать, скажем, принадлежащую тому же Л. Фейешу Тоту (см. § 4 гл. III книги [24]) теорему, согласно которой *для любого числа a и каждой отличной от круга K радиуса a фигуры F*

$$n(a, F) < \frac{3}{4}\nu(a, F)$$

(так что, если область F можно покрыть 40 кругами радиуса a, то в ней нельзя разместить более 29 непересекающихся кругов того же размера; ясно, что если F — это круг K радиуса a, то $n(a, F) = \nu(a, F) = 1$).

К этой же категории проблем относится и следующая несложная задача.

116. Пусть m — выпуклый многоугольник, а M — (больший) выпуклый многоугольник, получаемый из m сдвигом всех сторон m на расстояние 1 во внешнюю сторону (рис. 56). Докажите, что

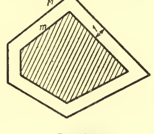


Рис. 56.

$$n(1,\ M) \geqslant \nu(2,\ m).$$

117. а) Как расположить на круглой площади $n (=1,$ $2,$ $3,$ $4,$ $7)$ киосков с мороженым наиболее выгодным способом (т. е. так, чтобы наибольшее из расстояний от точки площади до ближайшего киоска было возможно меньшим)?

б) Как наиболее выгодным способом расположить на квадратной площади n $(=1, 2, 3, 4)$ киосков с мороженым?

По поводу задачн 117 б) см. работы [124] канадцев Дж. Шаеран А. Меира, где эта задача фактическн решена для всех $n \leqslant 9$, а также работы Дж. Шаера [125], посвященные стереометрическому варианту той же задачи.

118. а) Чему равен радиус наименьшего круга, в который можно поместить n точек $(n = 2, 3, 4, \ldots, 10, 11)$, одна из которых совпадает с центром круга, так, чтобы расстояние между каждыми двумя точками было не меньше 1?

б)* Сколько точек можно поместить внутри круга радиуса 2 так, чтобы одна из точек совпадала с центром круга и расстояние между каждыми двумя точками было не меньше 1?

Естественная моднфикация рассматрнваемых выше проблем о покрытии фнгуры F кругамн K_1, K_2, ... и о заполнении F (непересекающнмися) кругамн k_1, k_2, ... возникает, еслн отказаться от требовання равенства всех кругов K_i нлн k_i (где $i = 1, 2, 3, \ldots$). Некоторые (впрочем, довольно бедные) результаты, связанные с рассмотрением кругов *двух* нли *нескольких* фнксированных размеров, нмеются в кннге [24] (см., в частности, 2-е изданне этой книги). Что же касается задач о «плотнейшем» заполненнн фигуры F фиксированным числом n кругов $k_1, k_2, \ldots, k_n$ произвольных размеров нлн «двойственной» ей задачи покрытия F «наиболее экономной» снстемой n кругов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ произвольных размеров, то здесь мы пока не нмеем почтн совсем ннкакнх данных, что можно проиллюстрировать следующнм эпизодом нз нсторнн математики.

Геометрам старшего поколения хорошо известна так называемая задача Мальфатти, требующая *вписать в данный* $\triangle ABC$ *три круга так, чтобы каждый из них касался двух сторон треугольника и двух других кругов* (рис. 57, *а*) [1]. Немногие, однако, знают, что соответствующая задача была сформулирована известным итальянским математиком конца XVIII и начала XIX вв.

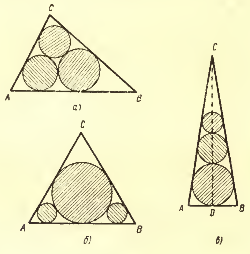


Рис. 57.

Дж. Мальфатти [2]) следующим образом: *поместить в данный треугольник ABC три непересекающиеся круга* k_1, k_2 *и* k_3 *наибольшей возможной площади* (т. е. как задача о плотнейшем заполнении треугольника тремя кругами) [3]). Дж. Мальфатти не сомневался, что

[1]) См., например, Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, М., Учпедгиз, 1957, Прибавление *E* — «Задача Мальфатти».

[2]) Впрочем, известность Джанфранческо Мальфатти носит, если можно так выразиться, скорее «негативный», чем «позитивный» характер: при упоминании этого имени математики чаще всего вспоминают многочисленные *неудачные* попытки Мальфатти найти общую формулу для решения общего алгебраического уравнения 5-й степени, а также сокрушительную (и несправедливую) критику, с которой он обрушился на работы итальянского врача и замечательного математика-любителя Паоло Руффини, давшего первое, хотя в некоторых деталях и неполное, доказательство того, что такой формулы вовсе не существует: Мальфатти сумел верно нащупать слабое звено в рассуждениях Руффини, но оказался абсолютно не в состоянии оценить глубину и оригинальность исследований последнего.

[3]) Точнее говоря, поставленная Дж. Мальфатти задача формулировалась так: *вписать в данную треугольную призму три* (непересекающихся) *цилиндра* (высота которых равна высоте призмы) *наибольшего общего объема*; однако ясно, что эта задача равносильна сформулированной задаче о треугольнике.

решение соответствующей «задачи о наиболее экономном заполнении треугольника кругами» во всех случаях дается рис. 57, *а*; не сомневались в этом, видимо, и многочисленные авторы, решавшие «задачу Мальфатти» впоследствии (Дж. Мальфатти указал а л г е б р а и ч е с к о е решение задачи о построении изображенных на рис. 57, *а* кругов k_1, k_2 и k_3, позволяющее вычислить — и построить циркулем и линейкой — их радиусы; наиболее изящное чисто г е о м е т р и ч е с к о е решение той же задачи дал один из крупнейших геометров XIX в. швейцарец Якоб Ш т е й н е р).

Лишь в 60-х годах нашего столетия, в связи с подъемом интереса к тем вопросам, которые ныне объединяются названием «комбинаторная геометрия», математики вновь обратились (см. работы [126], в которых, впрочем, указана и более ранняя литература) к исходной задаче Мальфатти (а также к так называемой «обратной задаче Мальфатти», требующей *указать такой наименьший по площади треугольник, что в него можно поместить три неперекрывающиеся круга заданных размеров* — см. [127]); при этом оказалось, что соответствующие задачи являются довольно трудными, так что для выполнения связанных с ними расчетов пришлось даже прибегать к ЭВМ. Разумеется, для тех или иных конкретно заданных треугольников соответствующая задача решается легко: так, например, «плотнейшее заполнение» п р а в и л ь н о г о треугольника тремя кругами изображено на рис. 57, *б*; еще проще видеть, что для «достаточно вытянутого в высоту» равнобедренного треугольника решение дается рис. 57, *в*. Однако в общем случае указать четкие критерии расположения «кругов Мальфатти» (в первоначальном понимании этого термина) достаточно сложно; при этом интересно, что н и в о д н о м с л у ч а е это расположение не совпадает с изображенным на рис. 57, *а* (см. [126]).

Обратимся, наконец, к некоторым (вообще говоря, еще более сложным) с т е р е о м е т р и ч е с к и м задачам.

119. Можно ли на непрозрачной планете, имеющей форму шара диаметра D, расположить 8 станций наблюдения так, чтобы любое космическое тело, приближающееся к планете, в тот момент, когда оно находится на высоте D над поверхностью планеты, было видно по крайней мере с двух станций?

120*. а) Как поместить на сфере n ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) точек так, чтобы расстояние между ближайшими двумя из этих точек было наибольшим?

б) Как разместить на сфере единичного радиуса наибольшее возможное число точек, если требуется, чтобы расстояние между каждыми двумя из этих точек было

$$1)\ \geqslant \sqrt{2},$$
$$2)\ > \sqrt{2}.$$

Задаче 120 а) (в которой естественно не ограничиваться лишь перечисленными небольшими значениями n) посвящена огромная

литература (см. по этому поводу гл. VI книги Л. Фейеша Тота [24], в частности второе издание этой книги); однако точных результатов здесь имеется весьма немного. Оптимальные расположения на сфере 7, 8 и 9 точек изображены на рис. 58, *а* — *в* (на которых линиями соединены те точки сферы, расстояние между которыми равно минимальному из попарных расстояний между точками). При

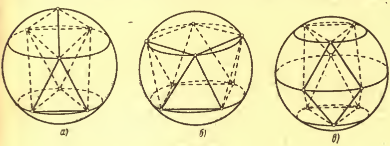


Рис. 58.

$n > 9$ известно решение задачи лишь для случаев $n = 12$, когда точки располагаются в вершинах вписанного в сферу правильного икосаэдра, и $n = 24$, когда точки располагаются в вершинах вписанного в сферу «полуправильного» 38-гранника, ограниченного 32 равносторонними треугольниками и 6 квадратами (в каждой вершине многогранника сходятся 4 треугольника и 1 квадрат).

РЕШЕНИЯ

1. Пусть наибольшее из девяти расстояний между вершинами наших двух треугольников будет равно a, и пусть M — произвольная точка треугольника ABC и M_1 — произвольная точка треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 59). Докажем, что $MM_1 \leqslant a$. Проведем через M произвольную прямую, лежащую в плоскости треугольника ABC и пересекающую стороны этого треугольника в точках P и Q. Из углов M_1MP и M_1MQ по крайней мере один не меньше 90°; пусть таким будет, например, угол M_1MP. В таком случае из рассмотрения треугольника M_1MP сразу следует, что $M_1P > M_1M$. Далее пусть AB есть та сторона треугольника ABC, на которой лежит точка P. Хотя бы один из углов M_1PA и M_1PB не меньше 90°; пусть это будет, например, угол M_1PA. В таком случае $M_1A > M_1P$ и, следовательно, $M_1A > M_1M$. Поступая теперь с точкой M_1 так же, как мы раньше поступали с точкой M, покажем, что $AM_1 \leqslant AA_1$, где A_1 — одна из вершин треугольника $A_1B_1C_1$. Но по условию $AA_1 \leqslant a$, откуда и следует справедливость нашего утверждения.

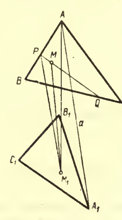


Рис. 59.

2. Проведем через середину M_1 отрезка A_1B_1 отрезок $M_1A' \# A_1A$ и отрезок $M_1B' \# B_1B$ (рис. 60, a). При этом четырехугольник M_1A_1AA' будет параллелограммом[1]); поэтому $AA' \# A_1M_1$. Аналогично этому является параллелограммом[1]) и четырехугольник M_1B_1BB'; поэтому $BB' \# B_1M_1$. Ясно, что параллельные между собой отрезки AA' и BB', проведенные через концы отрезка AB, лежат в одной плоскости π, проходящей через прямую AB. Соединим теперь точку M с точками A' и B'; при этом в треугольниках MAA' и MBB' (лежащих в одной плоскости π!) будем иметь: $\angle MAA' = \angle MBB'$ (ибо $AA' \parallel BB'$), $MA = MB$ (так как точка M — середина отрезка AB) и $AA' = BB'$ (так как $AA' = A_1M_1$, $BB' = B_1M_1$, а отрезки A_1M_1 и B_1M_1 равны). Следовательно, эти треугольники равны, и значит, $A'M = B'M$ и $\angle A'MA = \angle B'MB$. Но из последнего равенства вытекает, что точки A', M и B' плоскости π *принадлежат одной прямой*; таким образом, «ломаная» $A'MB'$ составляет один отре-

[1]) Этот параллелограмм может оказаться *вырожденным*, т. е. все его вершины могут принадлежать одной прямой.

вок, и точка M является серединой стороны $A'B'$ треугольника $A'M_1B'$.

Так как $M_1A' = A_1A$ и $M_1B' = B_1B$, то нам осталось лишь доказать, что *медиана* M_1M *треугольника* $A'M_1B'$ *не превосходит полусуммы его сторон* M_1A' *и* M_1B' *и не меньше их полуразности.* Но это устанавливается элементарно: продолжим медиану M_1M за

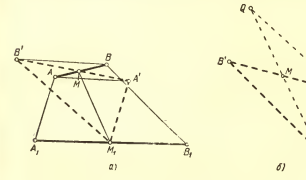


Рис. 60.

точку M на расстояние $MQ = M_1M$ и соединим Q с A' (рис. 60, *б*). Из равенства треугольников $M_1B'M$ и $QA'M$ имеем $M_1B' = QA'$; следовательно,

$$2M_1M = M_1Q$$

и

$$|M_1A' - M_1B'| = |M_1A' - A'Q| \leqslant M_1Q \leqslant M_1A' + A'Q = M_1A' + M_1B',$$

что нам и требовалось доказать.

Из проведенного доказательства нетрудно также усмотреть, что $MM_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$ в том и только в том случае, когда *отрезки* AB *и* A_1B_1 *лежат в одной плоскости и* $AA_1 \parallel BB_1$, *а направления отрезков* AA_1 *и* BB_1 (от A к A_1, соответственно от B к B_1) *одинаковы*; $M'M_1 = \frac{1}{2}|AA_1 - BB_1|$ в том и только в том случае, когда AB *и* A_1B_1 *лежат в одной плоскости,* $AA_1 \parallel BB_1$ *и направления отрезков* AA_1 *и* BB_1 *противоположны.*

3. а) Замкнутая четырехзвенная ломаная $ABCD$ может представлять собой: 1) плоский выпуклый четырехугольник (рис. 61, *а*); 2) плоский невыпуклый четырехугольник (рис. 61, *б*); 3) самопересекающийся четырехугольник (рис. 61, *в*); 4) неплоский четырехугольник (рис. 61, *г*). Во всех случаях

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leqslant 360^\circ.$$

В самом деле, в случае рис. 61, *а* эта сумма равна 360° (сумма углов выпуклого четырехугольника); в случае рис. 61, *б* она равна $2\angle CDA$ (ибо $\angle BCD + \angle CBD) + (\angle BAD + \angle ABD) = \angle CDM + \angle ADM = \angle CDA$), а $\angle CDA \leqslant 180^\circ$; в случае рис. 61, *в* та же

сумма равна $360° - 2\angle AQB$; наконец, в случае рис. 61, *г* эта сумма меньше общей суммы углов двух плоских треугольников ABC и ADC, ибо по известному свойству трехгранных углов $\angle BAC +$

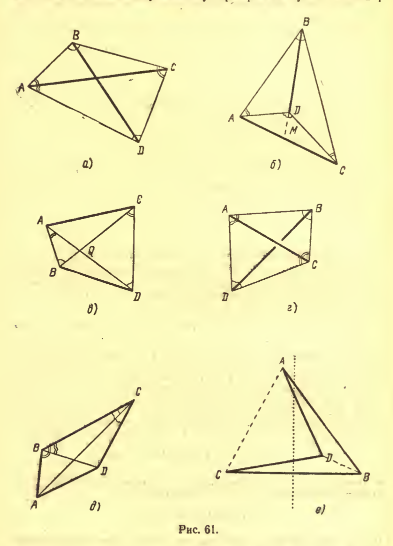


Рис. 61.

$+ \angle DAC < \angle BAD$ и $\angle BCA + \angle DCA < \angle BCD$. Поэтому во всех случаях один из четырех углов, опирающихся на «диагонали» AC и BD, *не больше* 90°. Но если, скажем, $\angle ABC \leqslant 90°$, то оба отрез-

ка AB и BC не могут быть меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$, так как иначе сторона AC треугольника ABC была бы меньше 1, что противоречит условию задачи.

Нетрудно убедиться, что ни один из отрезков AB, BC, CD и DA не больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$ лишь в том случае, если $ABCD$ — *квадрат* со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Если «диагонали» AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются, то этот четырехугольник плоский, выпуклый (рис. 61, *а*). Но в таком случае

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360°,$$

и значит, хоть один из этих четырех углов *не меньше* 90°. Но если $\angle ABC \geqslant 90°$, то оба отрезка AB и BC не могут быть больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$, в противном случае мы имели бы $AC > 1$.

Все отрезки AB, BC, CD и DA будут не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$ лишь в том случае, если $ABCD$ — *квадрат* со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) Если «диагонали» AC и BD четырехугольника $ABCD$ лежат в одной плоскости, но не пересекаются, то этот четырехугольник — невыпуклый или самопересекающийся (рис. 61, *б*, *в*). Если точки A, B, C и D расположены как на рис. 61, *б*, то

$$\angle BAD + \angle BCD = \angle ADC - \angle ABC < \angle ADC < \angle ADB + \angle CDB.$$

Поэтому неравенства $\angle BAD \geqslant \angle ADB$, $\angle BCD \geqslant \angle CDB$ не могут выполняться одновременно, и либо $AB > BD = 1$, либо $BC > BD = 1$. Если точки A, B, C и D расположены, как на рис. 61, *в*, то хоть один из углов (выпуклого) четырехугольника $ABCD$ не меньше 90°; но если, скажем, $\angle ABD \geqslant 90°$, то $AD > BD = 1$.

4. Будем доказывать требуемое утверждение от противного. Если выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 61, *д*) таков, что $AB \geqslant AC$, то $\angle BCA \geqslant \angle ABC$; но в таком случае, очевидно,

$$\angle BCD > \angle BCA \geqslant \angle ABC > \angle DBC,$$

и значит, $BD > CD$. Складывая это последнее неравенство с исходным неравенством $AB \geqslant AC$, мы получаем, что

$$AB + BD > AC + CD.$$

Но это противоречит условию задачи; значит, наше предположение о том, что $AB \geqslant AC$, было неверным.

Нетрудно видеть, что если четырехугольник $ABCD$ невыпуклый, то неравенства $AC + CD \geqslant AB + BD$ и $AB \geqslant AC$ совместимы (рис. 61, *е*).

5. а) Пусть N — точка, симметричная точке M относительно общей середины S отрезков AD и BC (рис. 62). В таком случае четырехугольники $AMDN$ и $BMCN$ — параллелограммы, второй из которых лежит внутри первого. Но если один выпуклый четырехугольник лежит внутри другого, то периметр его меньше периметра второго четырехугольника; поэтому

$$MA + MD + ND + NA \geqslant MB + MC + NB + NC,$$

или

$$2MA + 2MD \geqslant 2MB + 2MC,$$

т. е.

$$MA + MD \geqslant MB + MC,$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что равенство $MA + MD = MB + MC$ имеет место лишь тогда, когда точка M *совпадает с A или с D* (в этом случае вырожденные «параллелограммы» $AMDN$ и $BMCN$ совпадают — они обращаются в дважды взятый отрезок AD).

Рис. 62.

б) Примем за точку M плоскости сначала точку A, а затем точку D; тогда в силу условия задачи получим

$$AD \geqslant AB + AC \quad \text{и} \quad AD \geqslant BD + CD, \qquad (*)$$

откуда вытекает, что

$$2AD \geqslant AB + AC + BD + CD. \qquad \text{(I)}$$

С другой стороны, в силу неравенства треугольника имеем

$$AD \leqslant AB + BD \quad \text{и} \quad AD \leqslant AC + CD, \qquad (**)$$

а значит,

$$2AD \leqslant AB + BD + AC + CD. \qquad \text{(II)}$$

Из сравнения неравенств (I) и (II) вытекает, что

$$AD = AB + BD + AC + CD;$$

но это возможно только в том случае, когда как оба неравенства (*), так и оба неравенства (**) обращаются в равенства.

Первое из неравенств (**) обращается в равенство лишь в том случае, когда точка B принадлежит отрезку AD, а второе — когда точка C принадлежит отрезку AD; таким образом, *обе точки B и C должны принадлежать отрезку AD*. А теперь, например, первое из равенств (*) (ведь эти неравенства, как мы знаем, обращаются в равенства!) дает

$$AC + CD = AB + AC,$$

т. е.

$$AB = CD.$$

Но последнее равенство равносильно тому, что отрезки AD и BC имеют общую середину S!

6. а) Обозначим точки пересечения окружностей S_1 и S_2 с их линией центров O_1O_2 через A_1, B_1 и A_2, B_2, причем пусть точка O_2 принадлежит лучу O_1B_1, а точка O_1 — лучу O_2B_2 (рис. 63, *а*—*в*; если окружности S_1 и S_2 концентрические, то в качестве линии центров можно выбрать л ю б у ю из проходящих через общий центр

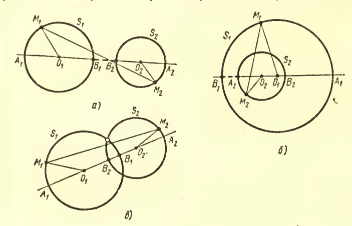


Рис. 63.

S_1 и S_2 прямых и обозначить через A_1 л ю б у ю из точек ее пересечения с окружностью S_1, а через A_2 — любую из точек ее пересечения с окружностью S_2). Обозначим, далее, через M_1 и M_2 произвольные точки окружностей S_1 и S_2. Из рассмотрения четырехугольника $O_1O_2M_2M_1$, очевидно, вытекает

$$M_1M_2 \leqslant M_1O_1 + O_1O_2 + O_2M_2, \quad \text{или} \quad M_1M_2 \leqslant A_1O_1 + O_1O_2 + O_2A_2,$$

т. е.

$$M_1M_2 \leqslant A_1A_2,$$

откуда следует, что *наибольшее расстояние между окружностями равно отрезку* A_1A_2, *т. е.* $d + r_1 + r_2$. С другой стороны, если окружности S_1 и S_2 не пересекаются, т. е. $d > r_1 + r_2$ (рис. 63, *а*), или $d < r_1 - r_2$ (рис. 63, *б*; здесь мы для определенности считаем, что $r_1 \geqslant r_2$), то из того же четырехугольника $O_1O_2M_2M_1$ следует, что

$$O_1O_2 \leqslant O_1M_1 + M_1M_2 + M_2O_2,$$

или

$$M_1M_2 \geqslant O_1O_2 - O_1M_1 - O_2M_2 = O_1O_2 - O_1B_1 - O_2B_2,$$

т. е. $M_1M_2 \geqslant B_1B_2$ (рис. 63, *а*), соответственно, что

$$O_1M_1 \leqslant O_1O_2 + O_2M_2 + M_2M_1,$$

или

$$M_1M_2 \geqslant O_1M_1 - O_1O_2 - O_2M_2 = O_1B_1 - O_1O_2 - O_2A_2,$$

т. е. $M_1M_2 \geqslant B_1A_2$ (рис. 63, *б*). Таким образом, в случае рис. 63, *а* наименьшее расстояние реализует отрезок B_1B_2, а в случае рис. 63, *б* — отрезок B_1A_2, так что это *наименьшее расстояние равно* $d - r_1 - r_2$ (рис. 63, *а*) *или* $r_1 - d - r_2$ (рис. 63, *б*). Наконец, если окружности S_1 и S_2 пересекаются (рис. 63, *в*) или касаются, то наименьшее расстояние между точками окружностей равно н у л ю.

б) Ясно, что наибольшее расстояние между точками к р у г о в K_1 и K_2 во всех случаях равно наибольшему расстоянию между точками ограничивающих эти круги окружностей S_1 и S_2. Наименьшее же расстояние между точками кругов отлично от нуля лишь в том случае, когда ограничивающие круги окружности лежат одна вне другой (см. рис. 63, *а*), и в этом случае оно равно наименьшему расстоянию между точками окружностей.

7. а) Если T_1 — меньший из двух треугольников (рис. 64), то расстояние от точки A_1 треугольника T_1 (понимаемого как *линия*, а не как часть плоскости [1])) до ближайшей к ней точки треугольника T_2 будет одним и тем же для всех точек A_1 — оно будет равно $\frac{\sqrt{3}}{6}$; поэтому $\rho(T_1, T_2) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Расстояние же от точки A_2 треугольника T_2 до ближайшей к ней точки треугольника T_1 будет больше всего в том случае, когда точка A_2 совпадает с вершиной треугольника, причем в этом случае оно равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$; поэтому $\rho(T_2, T_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рис. 64.

б) Если K_1 — меньший из двух кубов, то расстояние от точки A_1 куба K_1 (понимаемого как *поверхность*, а не как часть пространства! [2])) до ближайшей к ней точки куба K_2 будет одним и тем же для всех точек A_1 — оно будет равно $\frac{1}{2}$; поэтому $\rho(K_1, K_2) = \frac{1}{2}$. Расстояние же от точки A_2 куба K_2 до ближайшей к ней точки куба K_1 будет наибольшим тогда, когда точка A_2 совпадает с вершиной куба, причем в этом последнем случае оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$; поэтому $\rho(K_2, K_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Обозначим $\rho(\Phi_1, \Phi_2) = a$, $\rho(\Phi_2, \Phi_3) = b$, и пусть A — произвольная точка фигуры Φ_1 (см. рис. 65, *а*, на котором Φ_1, Φ_2 и Φ_3 — замкнутые кривые *линии*). Так как н а и б о л ь ш е е из расстояний от точки фигуры Φ_1 до самой близкой к ней точки фигуры Φ_2 равно a, то фигура Φ_2 содержит такую точку B, что расстояние от

---

[1]) Если под треугольниками T_1 и T_2 понимать *части плоскости*, то расстояние $\rho(T_2, T_1)$ не изменится; однако расстояние $\rho(T_1, T_2)$ будет в этом случае равно нулю.

[2]) Если под кубами K_1 и K_2 понимаются *части пространства*, то расстояние $\rho(K_2, K_1)$ не изменится, но расстояние $\rho(K_1, K_2)$ будет равно нулю.

точки A фигуры Φ_1 до точки B фигуры Φ_2 не превосходит a. Далее, так как наибольшее из расстояний от точки фигуры Φ_2 до самой близкой к ней точки фигуры Φ_3 равно b, то для точки B

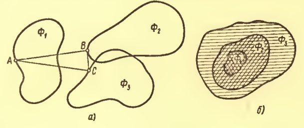


Рис. 65.

фигуры Φ_2 можно отыскать такую точку C фигуры Φ_3, что расстояние от точки B фигуры Φ_2 до точки C фигуры Φ_3 не превосходит b. Но из неравенств $AB \leqslant a$ и $BC \leqslant b$ следует, что

$$AC \leqslant AB + BC \leqslant a + b;$$

таким образом, для каждой точки A фигуры Φ_1 найдется такая точка C фигуры Φ_3, что $AC \leqslant a + b = \rho(\Phi_1, \Phi_2) + \rho(\Phi_2, \Phi_3)$, т. е.

$$\rho(\Phi_1, \Phi_3) \leqslant \rho(\Phi_1, \Phi_2) + \rho(\Phi_2, \Phi_3).$$

б) Может. Так, если фигура Φ_1 содержится в фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 содержится в фигуре Φ_3 (рис. 65, *б*; здесь $\Phi_1 - \Phi_3$ — части плоскости, а не линии), то, очевидно, $\rho(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ и $\rho(\Phi_2, \Phi_3) = 0$, откуда, однако, еще вовсе не следует, что $\rho(\Phi_3, \Phi_1) = 0$; таким образом, в этом случае возможно, что

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) = 0,\ \rho(\Phi_2, \Phi_3) = 0,\ \text{а}\ \rho(\Phi_3, \Phi_1) > \rho(\Phi_1, \Phi_2) + \rho(\Phi_2, \Phi_3) = 0.$$

9. а) Заметим прежде всего, что наименьшее расстояние от точки A (окружности радиуса 0) до окружности S с центром O реализуется отрезком AB_1, где B_1 — ближайшая к A точка пересечения прямой OA с окружностью S (ибо если M — произвольная точка окружности S, то в обозначениях рис. 66 *а*, *б* $AM \geqslant AO - OM = AO - OB_1 = AB_1$, соответственно $AM \geqslant OM - OA = OB_1 - OA = AB_1$); поэтому, если $OA = d$, а радиус окружности S равен r, то *наименьшее расстояние от A до S равно $d - r$ или $r - d$*.

Рассмотрим теперь две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2. Если окружность S_1 расположена *вне* S_2 (рис. 66, *в*, *г*), то наиболее удалена от окружности S_2 та точка A_1 окружности S_1, которая *расположена дальше всего от центра* S_2, т. е. более далекая от O_2 точка A_1 пересечения с S_1 линии центров O_1O_2 обеих окружностей (ибо если M — произвольная точка окружности S_1, то в обозначениях рис. 66, *в*, *г* $MO_2 \leqslant MO_1 + O_1O_2 = A_1O_1 + O_1O_2 = A_1O_2$); таким образом, в этом случае $\rho(S_1, S_2) = A_1B_2 = d + r_1 - r_2$. Если окружность S_1 расположена *внутри* окружности S_2 (рис. 66, *д*, *е*), то ближе всего к центру O_2 окружности S_2 будет более близкая к O_2 точка A_1 пересечения с S_1 линии центров O_1O_2 окружностей S_1 и S_2 (ибо если M — произвольная точка S_1, то в обозначениях

рис. 66, д, е $MO_2 \geqslant O_1M - O_1O_2 = O_1A_1 - O_1O_2 = O_2A_1$, соответственно $MO_2 \geqslant O_1O_2 - MO_1 = O_1O_2 - A_1O_1 = A_1O_2$); поэтому здесь $\rho(S_1, S_2) = A_1B_2 = r_2 - |d - r_1|$. Наконец, если окружности S_1 и S_2 пересекаются (рис. 66, ж, з), то из внешних по отношению

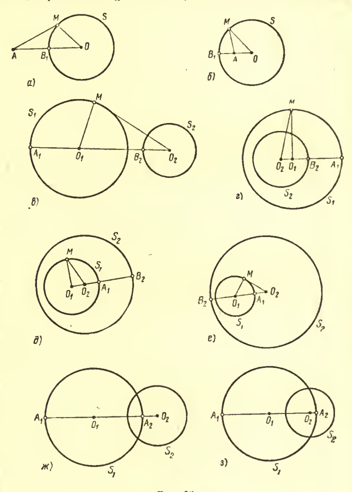


Рис. 66.

к S_2 точек окружности S_1 наиболее далекой от O_2 является та точка A_1 пересечения с S_1 линии центров O_1O_2 обеих окружностей, расстояние которой от S_2 равно $d + r_1 - r_2$, а из внутренних по отношению к S_2 точек окружности S_1 ближе всего к O_2 вторая точка A_2 пересечения S_1 с линией центров O_1O_2, расстояние которой

от S_2 равно $r_2 - |d - r_1|$; таким образом, расстояние $\rho(S_1, S_2)$ окружности S_1 от окружности S_2 равно в этом случае наибольшему из выражений $d + r_1 - r_2$ и $r_2 - |d - r_1|$.

Итак, если окружности S_1 и S_2 лежат одна *вне* другой (рис. 66, *в*; сюда мы включаем и случай внешнего касания двух окружностей), то $\rho(S_1, S_2) = d + r_1 - r_2$ и $\rho(S_2, S_1) = d + r_2 - r_1$; поэтому $P(S_1, S_2) = d + r_1 - r_2$, где для определенности принято $r_1 \geqslant r_2$. Если окружность S_2 лежит *внутри* S_1 (рис. 66, *г*; сюда мы включаем и случай внутреннего касания двух окружностей), то $\rho(S_1, S_2) = d + r_1 - r_2$ и $\rho(S_2, S_1) = r_2 - |d - r_1|$; здесь $P(S_1, S_2) = d + r_1 - r_2$. Наконец, если окружности S_1 и S_2 пересекаются (рис. 66, *ж*, *з*), то

$$\rho(S_1, S_2) = \max[d + r_1 - r_2,\ r_2 - |d - r_1|] \quad \text{и} \quad \rho(S_2, S_1) = \max[d - r_1 + r_2,\ r_1 - |d - r_2|],$$

т. е.

$$P(S_1, S_2) = \max[d + r_1 - r_2,\ d - r_1 + r_2,\ r_2 - |d - r_1|,\ r_1 - |d - r_2|],$$

откуда без особого труда устанавливается, что если $r_1 \geqslant r_2$, то

$$P(S_1, S_2) = d + r_1 - r_2.$$

б) Пусть K_1 и K_2 — *круги*, ограниченные окружностями S_1 и S_2. Если окружности S_1 и S_2 лежат одна вне другой, то, очевидно, $\rho(K_1, K_2) = \rho(S_1, S_2)$ и $\rho(K_2, K_1) = \rho(S_2, S_1)$; поэтому $P(K_1, K_2) = P(S_1, S_2)$. Если окружность S_2 лежит внутри окружности S_1, то $\rho(K_1, K_2) = \rho(S_1, S_2)$, но $\rho(K_2, K_1) = 0$; поэтому здесь $P(K_1, K_2) = \rho(K_1, K_2) = \rho(S_1, S_2) = P(S_1, S_2)$. Наконец, если окружности S_1 и S_2 пересекаются, то $\rho(K_1, K_2) = d + r_1 - r_2$ и $\rho(K_2, K_1) = d - r_1 + r_2$, так что при $r_1 \geqslant r_2$ имеем $P(K_1, K_2) = d + r_1 - r_2 = P(S_1, S_2)$. Таким образом, во всех случаях

$$P(K_1, K_2) = P(S_1, S_2),$$

хотя равенство $\rho(K_1, K_2) = \rho(S_1, S_2)$ может и не иметь места.

в) Так как $P(\Phi_1, \Phi_2)$ — это наибольшая из величин $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$ и $\rho(\Phi_2, \Phi_1)$, то в силу результата задачи 8 а) имеем

$$\rho(\Phi_1, \Phi_3) \leqslant \rho(\Phi_1, \Phi_2) + \rho(\Phi_2, \Phi_3) \leqslant P(\Phi_1, \Phi_2) + P(\Phi_2, \Phi_3)$$

и

$$\rho(\Phi_3, \Phi_1) \leqslant \rho(\Phi_3, \Phi_2) + \rho(\Phi_2, \Phi_1) \leqslant P(\Phi_2, \Phi_3) + P(\Phi_1, \Phi_2),$$

откуда и следует, что

$$P(\Phi_1, \Phi_3) = \max[\rho(\Phi_1, \Phi_3),\ \rho(\Phi_3, \Phi_1)] \leqslant P(\Phi_1, \Phi_2) + P(\Phi_2, \Phi_3).$$

10. а) Ясно, что $\mu(A) = AB_0 = \min\limits_{B \in \Gamma} AB$ — это радиус наибольшего из кругов с центром A, еще заключающегося внутри «кляксы» Φ (рис. 67, *а*); величина $\mu = \max\limits_{A \in \Phi} \mu(A)$ есть радиус *наибольшего из всех заключенных внутри* Φ *кругов* (рис. 67, *б*; соответствующий круг $\varkappa$ называется вписанным кругом фигуры Φ[1]). Аналогично этому $\nu(A) = AC_0 = \max\limits_{C \in \Gamma} AC$ — это радиус

[1]) Ср. стр. 68 и рис. 31, *а*, *б*.

наименьшего из всех кругов с центром A, который содержит фигуру Φ внутри себя (рис. 67, *а*); $\nu = \min\limits_{A \in \Phi} \nu(A)$ есть радиус *наименьшего из всех содержащих* Φ *внутри себя кругов* (рис. 67, *б*; этот круг K называется Описанным кругом фигуры Φ). Отсюда следует, что

$$\mu \leqslant \nu.$$

б) Из решения задачи а) вытекает, что равенство $\mu = \nu$ имеет место в том и только в том случае, когда Φ — круг (и следовательно, $\varkappa \equiv K \equiv \Phi$) [1].

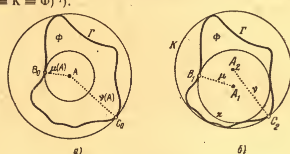


Рис. 67.

11. *Если MA, MB и MC — расстояния от произвольной точки M плоскости до вершин равностороннего треугольника ABC, то отрезок CM не больше суммы расстояний AM и BM и не меньше их разности* (см., например, задачу 134 б) книги Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом [13]); таким образом, в нашем случае

$$MB - MA = 1 \leqslant MC \leqslant MB + MA = 5.$$

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что расстояние CM может принимать любое значение в интервале $1 \leqslant x \leqslant 5$, в частности может равняться 5 и может равняться 1.

12. Пусть M_1 и M_2 — две произвольные диаметрально противоположные точки окружности S радиуса 1. В таком случае $M_1M_2 = 2$, и следовательно,

$$M_1A_1 + M_2A_1 \geqslant M_1M_2 = 2,$$
$$M_1A_2 + M_2A_2 \geqslant 2,\ \ldots,\ M_1A_{1000} + M_2A_{1000} \geqslant 2$$

($M_1A_1 + M_2A_1 = 2$, если точка A_1 принадлежит отрезку M_1M_2, и $M_1A_1 + M_2A_1 > 2$ во всех остальных случаях). Поэтому

$$(M_1A_1 + M_2A_1) + (M_1A_2 + M_2A_2) + \ldots + (M_1A_{1000} + M_2A_{1000}) =$$
$$= (M_1A_1 + M_1A_2 + \ldots + M_1A_{1000}) +$$
$$+ (M_2A_1 + M_2A_2 + \ldots + M_2A_{1000} \geqslant 2000,$$

[1]) Если определить величины μ и ν равенствами $\mu = \sup\limits_{A \in \Phi} \inf\limits_{B \in \Gamma} AB$ и $\nu = \inf\limits_{A \in \Phi} \sup\limits_{C \in \Gamma} AC$, то их значения совпадут и для фигуры Φ, являющейся «почти кругом» (ср. со сноской на стр. 18).

и значит, хоть одна из двух точек M_1 и M_2 наверняка удовлетворяет условию задачи: сумма расстояний от нее до точек $A_1, A_2, \ldots, A_{1000}$ не меньше 1000.

13. Нам надо доказать, что все расстояния $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, \ldots$ $\ldots, A_0A_n$ меньше 3. Пусть A_k — какая-то из вершин $A_2, A_3, \ldots, A_n$ (поскольку $A_0A_1 = 1 < 3$, то для вершины A_1 нет необходимости в дополнительной проверке заключения задачи). Опишем вокруг треугольников $A_0A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4, \ldots, A_{k-2}A_{k-1}A_k$ окружности $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{k-1}$; их центры обозначим через $O_1, O_2, O_3, \ldots$ $\ldots, O_{k-1}$ (рис. 68, а, где $k = 5$).

Рассмотрим ломаную $A_0O_1O_2O_3\ldots$ $\ldots O_{k-1}A_k$. Очевидно,

$$A_0A_k \leqslant A_0O_1 + O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots$$
$$\ldots + O_{k-2}O_{k-1} + O_{k-1}A_k =$$
$$= A_0O_1 + (O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots$$
$$\ldots + O_{k-2}O_{k-1}) + O_{k-1}A_k.$$

Пусть S_1 есть середина отрезка A_0A_1. Из треугольника $A_1S_1O_1$ находим

$$A_0O_1 = A_1O_1 = \frac{A_1S_1}{\cos\angle O_1A_1S_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\frac{\angle A_2A_1A_0}{2}}.$$

Но по условию $\angle A_2A_1A_0 \leqslant 120°$; следовательно, $\frac{\angle A_2A_1A_0}{2} \leqslant 60°$ и

$$A_0O_1 \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{\cos 60°} = 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$A_kO_{k-1} \leqslant 1.$$

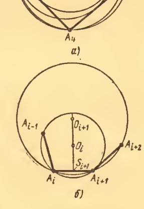


Рис. 68.

Таким образом, нам остается только оценить длину ломаной $O_1O_2O_3\ldots O_{k-1}$. Проведем через точки A_0 и A_1 окружности $C_2', C_3', \ldots, C_{k-1}'$, равные соответственно окружностям $C_2, C_3, \ldots$ $\ldots, C_{k-1}$; центры этих окружностей обозначим через $O_2', O_3', \ldots$ $\ldots, O_{k-1}'$. Мы утверждаем, что

$$O_1O_2 = O_1O_2', \quad O_2O_3 = O_2'O_3',$$
$$O_3O_4 = O_3'O_4', \ldots, O_{k-2}O_{k-1} = O_{k-2}'O_{k-1}'.$$

Действительно, пара окружностей C_1 и C_2 равна паре окружностей C_1 и C_2'; если сдвинуть первую пару окружностей так, чтобы отрезок A_1A_2 перешел в равный ему отрезок A_0A_1, то эта пара

совпадет с парой окружностей C_1 и C_2' [1]). Отсюда следует, что $O_1O_2 = O_1O_2'$. Аналогично пара окружностей C_2 и C_3 равна паре окружностей C_2' и C_3' (движение, переводящее отрезок A_2A_3 в отрезок A_0A_1, совмещает первую пару окружностей со второй); поэтому $O_2O_3 = O_2'O_3'$. Точно так же доказываются и равенства $O_3O_4 = O_3'O_4', \ldots, O_{k-2}O_{k-1} = O_{k-2}'O_{k-1}'$.

Таким образом,

$$O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_4 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1} = O_1O_2' + O_2'O_3' + O_3'O_4' + \ldots + O_{k-2}'O_{k-1}'.$$

Но все точки $O_1, O_2', O_3', \ldots, O_{k-1}'$ расположены на перпендикуляре, восставленном к отрезку A_0A_1 в его середине S_1. Если обозначить середины отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-2}A_{k-1}$ через $S_2, S_3, \ldots, S_{k-1}$ (рис. 68, *б*), то легко получить

$$O_1S_1 = A_1S_1 \operatorname{tg} \angle O_1A_1S_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle A_2A_1A_0}{2},$$

$$O_2'S_1 = O_2S_2 = A_2S_2 \operatorname{tg} \angle O_2A_2S_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle A_3A_2A_1}{2},$$

$$O_3'S_1 = O_3S_3 = A_3S_3 \operatorname{tg} \angle O_3A_3S_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle A_4A_3A_2}{2},$$

. . . .

$$O_{k-1}'S_1 = O_{k-1}S_{k-1} = A_{k-1}S_{k-1} \operatorname{tg} \angle O_{k-1}A_{k-1}S_{k-1} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle A_kA_{k-1}A_{k-2}}{2}.$$

А так как по условию задачи

$$60^\circ \leqslant \angle A_0A_1A_2 \leqslant \angle A_1A_2A_3 \leqslant \ldots \leqslant \angle A_{k-2}A_{k-1}A_k \leqslant 120^\circ,$$

то

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} 30^\circ \leqslant O_1S_1 \leqslant O_2'S_1 \leqslant O_3'S_1 \leqslant \ldots \leqslant O_{k-1}'S_1 \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Из последних неравенств вытекает

$$O_1O_2' + O_2'O_3' + O_3'O_4' + \ldots + O_{k-2}'O_{k-1}' = O_1O_{k-1}' = O_{k-1}'S_1 - O_1S_1 \leqslant \frac{1}{2} (\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ)$$

---

[1]) Последнее условие, по существу, должно быть включено в определение окружности C_2' (ибо через точки A_0 и A_1 проходят *две* окружности, равные C_2; нам из них надо выделить одну). Аналогичное замечание можно сделать и об окружностях $C_3', C_4', \ldots$, и т. д.

и, значит,

$$O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_4 + \dots + O_{k-2}O_{k-1} \leqslant \frac{1}{2}(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

откуда окончательно имеем

$$A_0A_k \leqslant A_0O_1 + (O_1O_2 + O_2O_3 + \dots + O_{k-2}O_{k-1}) + O_{k-1}A_k \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 < 2{,}58 < 3,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Было бы интересно определить точное значение $\inf A_0A_n$ (относительно обозначений см. стр. 17), достигаемое в условиях задачи 13, а также обдумать вопрос о том, нельзя ли те или иные из этих условий ослабить или отбросить.

14. Мы утверждаем, что искомым является квадрат AA_1BB_1, диагональю которого является отрезок AB; сумма расстояний от A до вершин этого квадрата равна

$$AB + AA_1 + AB_1 = AB(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})\, d.$$

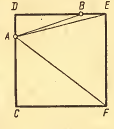


Рис. 69.

В самом деле, пусть $CDEF$ — произвольный квадрат со стороной h, на границе которого лежат точки A и B (рис. 69; точка A лежит на стороне CD). Очевидно, что

$$AC + AD = h, \qquad AE \geqslant h, \qquad AF \geqslant h,$$

следовательно, наибольшим среди отрезков AC, AD, AE, AF является один из отрезков AE или AF. Пусть, например, это будет отрезок AF. Так как из всех точек границы квадрата $CDEF$ от точки A наиболее удалена одна из его вершин (ср. с задачей 1), то $AB \leqslant AF$.

Далее, из всех пар точек квадрата $CDEF$ наиболее удалены друг от друга вершины C и E (или D и F; ср. ниже задачу 78 а)); поэтому

$$AB \leqslant CE = \sqrt{2}h.$$

Отсюда имеем

$$AC + AD = h \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} AB \quad \text{и} \quad AE \geqslant h \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} AB;$$

поэтому, так как $AF \geqslant AB$,

$$AC + AD + AE + AF \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} AB + \frac{1}{\sqrt{2}} AB + AB = AB(1 + \sqrt{2}).$$

Легко видеть, что знак равенства имеет место только для квадрата AA_1BB_1, т. е. только этот квадрат — искомый.

15. Продолжим отрезки A_2A_3 до пересечения с l_4 в точке C и BA_4 до пересечения с A_2C в точке D (рис. 70, *а*). Если обозначить $OA_1 = x$, $A_2A_3 = y$ и $OB = z$, то, поскольку $A_2C = A_1O$ (ибо

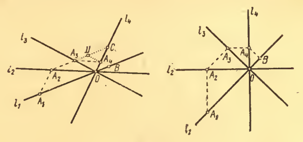


Рис. 70.

A_1A_2CO — параллелограмм) и $A_3D = OB$ (ибо A_3DBO — параллелограмм), будем иметь $A_2C = x$, $A_3C = x - y$ и $A_3D = z$. Далее заметим, что в подобных треугольниках A_2OC и A_3A_4C (напомним, что $A_3A_4 \parallel A_2O$!) отрезки A_2A_3 и A_3D являются соответственными (ибо $OA_3 \parallel A_4D$); поэтому

$$\frac{A_2C}{A_2A_3} = \frac{A_3C}{A_3D}, \qquad \text{т. е.} \qquad \frac{x}{y} = \frac{x-y}{z},$$

или

$$xz = y(x-y).$$

Далее:

а) Хоть один из отрезков y и $x - y$, в сумме составляющих отрезок x, не превосходит половины этого отрезка, а второй из них меньше самого отрезка x. Поэтому

$$y(x-y) < \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2,$$

и, следовательно,

$$xz < \frac{1}{2}x^2, \qquad \text{т. е.} \qquad z < \frac{1}{2}x.$$

б) Из этого же равенства $xz = y(x-y)$ имеем

$$xz = xy - y^2 = \frac{x^2}{4} - \left(\frac{x^2}{4} - xy + y^2\right) = \frac{x^2}{4} - \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 \leqslant \frac{x^2}{4},$$

поскольку $\left(\frac{x}{2} - y\right)^2 \geqslant 0$; поэтому

$$z \leqslant \frac{x}{4}.$$

Это неравенство обращается в равенство в том случае, когда $y = \frac{x}{2}$ и $\frac{x}{2} - y = 0$ (см., например, рис. 70, *б*, на котором все углы

A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4 и A_4OB равны между собой); поэтому оно не может быть улучшено.

16. В силу теоремы о вписанном угле имеем

$$\angle A_1 = \frac{1}{2} \smile A_2A_3A_7 = 180^\circ - \frac{1}{2} \smile A_7A_1A_2,$$

$$\angle A_3 = 180^\circ - \frac{1}{2} \smile A_2A_3A_4, \quad \angle A_5 = 180^\circ - \frac{1}{2} \smile A_4A_5A_6$$

(сделайте чертеж!), откуда

$$\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = 3 \cdot 180^\circ - \frac{1}{2} \smile A_7A_1A_2 \ldots A_6 =$$

$$= 540^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - \smile A_6A_7) = 360^\circ + \frac{1}{2} \smile A_6A_7.$$

Но поскольку центр описанной вокруг семиугольника $A_1A_2\ldots A_7$ окружности лежит внутри семиугольника, $\smile A_6A_7 < 180^\circ$, и значит,

$$\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 < 360^\circ + \frac{1}{2} 180^\circ = 450^\circ.$$

17. Пусть AB — *самая близкая* к рассматриваемой точке M из всех диагоналей и сторон нашего правильного n-угольника. Если точка M принадлежит диагонали AB, то $\angle AOB = 180^\circ$; если же она не принадлежит AB, то так как точка M лежит в н у т р и многоугольника, найдется такая соседняя с B вершина C, что C и M лежат по одну сторону прямой AB (сделайте чертеж). Ясно, что $\angle BAC = \frac{1}{2n} \cdot 360^\circ = \frac{180^\circ}{n}$. Но точка M не больше удалена от диагонали AB, чем от AC; поэтому она лежит между биссектрисой AK угла $\angle BAC$ и диагональю AB (может быть, на AK), и значит,

$$\angle MAB \leqslant \angle KAB = \frac{180^\circ}{2n};$$

аналогично

$$\angle MBA \leqslant \frac{180^\circ}{2n}.$$

Теперь имеем

$$\angle AMB < 180^\circ$$

и

$$\angle AMB = 180^\circ - \angle MAB - \angle MBA \geqslant 180^\circ - \frac{180^\circ}{n} = 180^\circ\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

что и требовалось доказать.

18. а) Не представляет труда *построение* $\triangle ABC$ с заданным (острым) углом $\angle A = \alpha$ такого, что биссектриса AD, высота CH и медиана BM пересекаются в одной точке Q: достаточно отложить на стороне AU угла $UAV = \alpha$ произвольный отрезок AC, опустить из C на AV перпендикуляр CH (высоту будущего треугольника ABC) и соединить середину M отрезка AC с точкой Q пересечения CH и биссектрисы AW угла UAV (и треугольника ACB); прямая MQ

будет являться медианой искомого треугольника, а точка B пересечения MQ и AV — его вершиной (рис. 71). Из построения, в частности, следует, что заданием угла α искомый треугольник определяется «однозначно с точностью до подобия»: это значит, что, заменив отрезок AC каким-либо иным отрезком AC', мы придем к $\triangle AC'B' \sim \triangle ACB$, т. е. углы $\triangle ABC$ полностью определяются заданием величины $\alpha < 90°$.

Рис. 71.

Нам осталось убедиться, что, если $\alpha \leqslant 45°$, то $\angle ACB = \gamma$ тупой. Для этого проведем через C прямую CE (где E принадлежит лучу AV) так, что $\angle UCE = 2\alpha$; при этом $\angle ACE = 180° - 2\alpha \geqslant 90° > \alpha$ (если $\alpha \leqslant 45°$), и значит, $AE > CE$. С другой стороны, так как $\angle AEC = \alpha$, то $\triangle ACE$ равнобедренный; прямая $CH \perp AE$ — его биссектриса и, значит, EQ — третья биссектриса $\triangle ACE$. Но так как $AE > CE$, то EQ пересекает AM в точке F, расположенной между M и C $\left(\text{ибо } \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{CE} > 1, \text{ а } \frac{AM}{MC} = 1\right)$, откуда, в свою очередь, вытекает, что FQ пересекает сторону AB треугольника AMB, т. е. E расположено между A и B. Но отсюда следует, что $\angle ACB > \angle ACE \geqslant 90°$, что и требовалось доказать.

б) Заметим прежде всего, что *при увеличении угла* $UAV = \alpha$ от 0 до 90° *отвечающий* α *угол* $ACB = \gamma$ *монотонно убывает*. При вращении луча AV рис. 71 вокруг A в таком направлении, что α возрастает, угол $\gamma_1 = ACH = 90° - \alpha$, разумеется, *убывает*; докажем, что при этом *убывает* и $\gamma_2 = HCB$, а значит, и $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Ясно, что $\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{BH}{HC} = \frac{AH}{HC} : \frac{AH}{BH}$. Но $\frac{AH}{HC} = \operatorname{ctg}\alpha$ убывает с ростом α; покажем, что $\frac{AH}{BH}$ с ростом α растет, откуда и будет следовать, что $\operatorname{tg}\gamma_2$ убывает с ростом α, т. е. что с ростом α убывает γ_2.

Проведем прямую $CB' \parallel MB$ (где B' — точка луча AV). Так как $AM = MC$, то $BB' = AB$; поэтому, поскольку $\frac{BB'}{BH} = \frac{CQ}{QH}$ и AQ — биссектриса $\triangle ACH$,

$$\frac{AB}{BH} = \frac{BB'}{BH} = \frac{CQ}{QH} = \frac{AC}{AH} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Отсюда следует, что $\frac{AB}{BH}$ с ростом α растет (ибо $\cos\alpha$ убывает), а значит, растет с ростом α и $\frac{AH}{BH} = \frac{AB}{BH} - 1$, что и завершает рассуждение.

Таким образом, при росте α от 0 до некоторого угла α_0 (где $\alpha_0 > 45°$ в силу результата задачи а)) угол $\gamma = \angle ACB$ будет тупым; в пределах же $\alpha_0 < \alpha < 90°$ угол γ будет *острым*. Нам остается лишь определить величину α_0. Для этого изменим рис. 71 таким образом, чтобы на новом чертеже (где точки B, H, Q и B'

заменены на B_0, H_0, Q_0 и B_0' и вместо α мы пишем α_0) было $CB_0 \perp AC$, т. е. $\angle ACB_0 = \gamma = 90°$. По-прежнему мы имеем $\frac{AB_0}{B_0H_0} = \frac{1}{\cos\alpha_0}$; но так как $\triangle ACH_0$ и $\triangle ACB_0$ — прямоугольные с острым углом α_0, то, полагая $AC = 1$, получаем $AH_0 = \cos\alpha_0$, $AB_0 = 1/\cos\alpha_0$ и $B_0H_0 = 1/\cos\alpha_0 - \cos\alpha_0$, так что

$$\frac{1/\cos\alpha_0}{1/\cos\alpha_0 - \cos\alpha_0} = \frac{1}{\cos\alpha_0}, \quad \text{или} \quad 1 - \cos^2\alpha_0 = \cos\alpha_0,$$

т. е.

$$\cos^2\alpha_0 + \cos\alpha_0 - 1 = 0,$$

откуда без труда получаем (ведь угол α_0 острый!)

$$\cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \text{или} \quad \alpha_0 = \arccos\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 51°\,50'.$$

Итак, с условиями задачи совместимы следующие значения угла α:

$$90° \geqslant \alpha > \alpha_0 \approx 51°\,50'.$$

19. Пусть AC_1 — диагональ куба $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$, а M — точка поверхности K, принадлежащая, скажем, грани $ABCD$. Найдем сначала наибольшее значение $\angle AMC_1$. Мы имеем (сделайте чертеж!)

$$\angle AMC_1 = 180° - \angle C_1AM - \angle AC_1M.$$

Но $\angle C_1AM$ между диагональю AC_1 и лучом AM плоскости $ABCD$ будет, как известно, меньше всего в том случае, когда AM совпадает с проекцией AC «наклонной» AC_1 на плоскость $ABCD$, т. е. $\angle C_1AM = \angle C_1AC = \beta$, где, очевидно, $\operatorname{tg}\beta = \frac{C_1C}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда по таблицам находим $\beta \approx 35°\,15'\,52''$. А так как наименьшее значение $\angle AC_1M = 0$, то

$$\angle AMC_1 = 180° - \angle C_1AM - \angle AC_1M < 180° - \beta = \alpha\ (\approx 144°\,44'\,08''),$$

где α можно определить равенством $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. При этом ясно, что, выбирая точку M на луче AC достаточно близко к A, мы можем добиться того, чтобы $\angle AMC_1$ был сколь угодно близок к α.

Найдем теперь наименьшее значение $\angle AMC_1$. Опишем вокруг K сферу σ; ясно, что AC_1 — диаметр σ и что поэтому из любой точки σ отрезок AC_1 виден под углом 90°. А так как из всех точек внутри окружности ее диаметр виден под углом $> 90°$, то из всех точек внутри σ отрезок AC виден под углом $> 90°$; следовательно, для всех точек M поверхности K имеем $\angle AMC_1 \geqslant 90°$ и лишь для 6 (отличных от A и C_1) вершин K (они принадлежат σ) этот угол равен 90°.

Итак,

$$90° \leqslant \angle AMC_1 < \alpha\ (\approx 144°\,44'\,08''),$$

причем эти неравенства дальше уже улучшить нельзя.

20. Ясно, что если $R < \frac{1}{2}$, то требуемого отрезка AB не существует; поэтому можно считать, что $R \geqslant \frac{1}{2}$ (и $R \geqslant r$). Если отрезок AB сдвинуть параллельно, скажем в направлении опущенного из O на AB перпендикуляра, удаляя AB от O, то $\angle AOB$ уменьшится; поэтому можно считать, что один из концов AB, скажем A, принадлежит большей окружности S; при этом B принадлежит заключенной внутри S дуге $\sigma = \smile B_1B_2$ радиуса 1 с центром A, где B_1 принадлежит S, а B_2 — меньшей окружности s или отрезку OA (сделайте чертеж!).

Проведем из O касательную OB_0 к содержащей σ окружности. Если точка B_0 принадлежит σ, то при движении точки B по σ угол $AOB = \alpha$ сначала увеличивается до значения AOB_0, а затем начинает уменьшаться; если B_0 не принадлежит σ, то α при движении B от B_1 до B_2 изменяется монотонно. Таким образом, во всех случаях $\min\alpha$ отвечает совпадению B с B_1 или с B_2.

Если $R - r \geqslant 1$, то $\min\alpha = 0$, и он отвечает точке B_2 отрезка OA. Если $R - r < 1$, то из (равнобедренного!) $\triangle OAB_1$ и из $\triangle OAB_2$ получаем

$$\sin\frac{\angle AOB_1}{2} = \frac{1}{2R} \quad \left(\text{а } \cos\angle AOB_1 = 1 - \frac{1}{2R^2}\right)$$

и

$$\cos\angle AOB_2 = \frac{R^2 + r^2 - 1}{2Rr}.$$

Но

$$\frac{R^2 + r^2 - 1}{2Rr} - \left(1 - \frac{1}{2R^2}\right) = \frac{R^3 + Rr^2 - R - 2R^2r + r}{2R^2r} =$$

$$= \frac{(R - r)(R^2 - Rr - 1)}{2R^2r} = \frac{R - r}{2Rr}\left(R - \frac{1}{R} - r\right),$$

откуда следует, что

$$\textit{если } r \left\{ \begin{matrix} \leqslant \\ \geqslant \end{matrix} \right. R - \frac{1}{R}, \textit{ то } \cos\angle AOB_2 \left\{ \begin{matrix} \geqslant \\ \leqslant \end{matrix} \right. \cos\angle AOB_1,$$

и следовательно,

$$\angle AOB_2 \left\{ \begin{matrix} \leqslant \\ \geqslant \end{matrix} \right. \angle AOB_1.$$

Окончательно получаем: если $r \geqslant R - \frac{1}{R}$, то $\min\alpha = \angle AOB_1 = 2\arcsin\frac{1}{2R}$; если $R - 1 \leqslant r \leqslant R - \frac{1}{R}$, то $\min\alpha = \angle AOB_2 = \arccos\frac{R^2 + r^2 - 1}{2Rr}$; если $r \leqslant R - 1$, то $\min\alpha = 0$.

Примечание. Аналогично можно решить и вопрос о *наибольшем* возможном значении $\angle AOB = \alpha$; при этом можно считать, что точка B принадлежит окружности s, а A — дуге с центром B и радиусом 1, заключенной внутри рассматриваемого кольца. Анализ соответствующей задачи о возможных значениях угла α требует различения 14 (!) случаев (ср. с задачей 44 книги [4]).

21. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — какие-то n лучей, выходящих из точки O. Если лучи l_1 и l_2 направлены в противоположные стороны, то $\angle(l_1, l_2) = 180°$ и для любого третьего луча l_3 сумма $\angle(l_1, l_3) + \angle(l_2, l_3) = 180°$ (независимо от положения l_3). Исключим теперь из нашей системы все пары противоположно направленных лучей; пусть $l_1, l_2, \ldots, l_m$ (где $m \leqslant n$) — оставшиеся лучи. Закрепим лучи $l_3, \ldots, l_m$, а луч l_1 будем поворачивать; рассмотрим сумму

$$L = \angle(l_1, l_2) + \angle(l_1, l_3) + \ldots + \angle(l_1, l_m)$$

и выясним, как изменится сумма L при повороте луча l_1 на какой-то малый угол φ в положение l_1', т. е. сравним L с суммой L', получаемой из L при замене луча l_1 лучом l_1'. Нетрудно видеть, что сумма L может убывать как при малом повороте l_1 вокруг O в одном направлении, так и при повороте в противоположном направлении лишь в том случае, если в начальный момент луч l_1 был противоположен одному из лучей $l_2, \ldots, l_m$ (и следовательно, при повороте l_1 в любом направлении угол l_1 с этим лучом убывает); это, однако, невозможно, так как мы уже выкинули все пары взаимно противоположных лучей. Таким образом, при вращении луча l_1 на малый угол φ в каком-то одном направлении сумма L *не будет убывать*. При этом могут иметь место два случая: либо L остается постоянной при всех положениях луча l_1 — и тогда мы направим l_1 противоположно l_2 и затем отбросим оба эти луча; либо при вращении l_1 в рассматриваемом направлении L сначала возрастает, а при переходе луча l_1 через некоторое положение l_1^0 она начнет убывать (если сумма L непостоянна, то она не может все время возрастать, так как при повороте l_1 на 360° сумма L приходит к своему прежнему значению). Но L может начать убывать при переходе l_1 через положения l_1^0 лишь в том случае, если угол l_1 с одним из лучей $l_2, \ldots, l_m$ сначала возрастал, а при переходе через l_1^0 начал убывать, т. е. если l_1^0 противоположен одному из лучей $l_2, \ldots, l_m$. В этом случае мы повернем луч l_1 до положения l_1^0, а затем отбросим l_1^0 вместе с противоположным ему лучом; при этом общее число лучей уменьшится на два.

Продолжая поступать таким же образом, мы сможем дойти до такого положения, когда у нас либо остается единственный луч, либо не остается ни одного луча. Таким образом, *не уменьшая суммы попарных углов между лучами, произвольную систему n лучей можно заменить совокупностью k пар противоположно направленных лучей* (если $n = 2k$ четно) *или совокупностью k пар противоположно направленных лучей и еще одного луча* (если $n = 2k + 1$ нечетно). В последних двух случаях сумма всевозможных попарных углов между лучами соответственно равна

$$k^2 \cdot 180° \qquad \text{или} \qquad (k^2 + k) \cdot 180°;$$

она не зависит от расположения лучей (такого, что выполняются сформулированные выше условия) и является *наибольшей* из всех возможных.

22. Рассмотрим какие-либо три последовательных луча OX_{i-1}, OX_i и OX_{i+1}, где $2 \leqslant i \leqslant k-1$ [1]), и поменяем местами отрезки x_i и x_{i+1}, так что на рис. 72 $X_{i-1}X_i = X_i'X_{i+1}' = x_i$ и $X_iX_{i+1} = X_{i-1}X_i' = x_{i+1}$. Расстояние $OX_{i-1} = r_{i-1}$ $\Big($из теоремы Пифагора следует, что оно равно $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{i-1}^2}$, ибо $OX_1 = x_1\ (= r_1)$, $OX_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ (= r_2)$, $OX_3 = \sqrt{r_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\ (= r_3)$, и т. д.$\Big)$ мы обозначим просто через r; тогда $OX_i = \sqrt{r^2 + x_i^2}\ (= r_i)$, $OX_i' = \sqrt{r^2 + x_{i+1}^2} = (= r_i')$, $OX_{i+1} = OX_{i+1}' = \sqrt{r^2 + x_i^2 + x_{i+1}^2}\ (= r_{i+1})$, так что точки

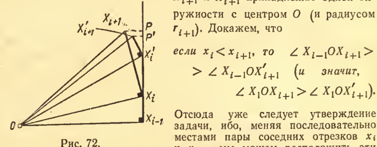


Рис. 72.

X_{i+1} и X_{i+1}' принадлежат одной окружности с центром O (и радиусом r_{i+1}). Докажем, что

если $x_i < x_{i+1}$, *то* $\angle X_{i-1}OX_{i+1} > \angle X_{i-1}OX_{i+1}'$ $\big($*и значит*, $\angle X_1OX_{i+1} > \angle X_1OX_{i+1}'\big)$.

Отсюда уже следует утверждение задачи, ибо, меняя последовательно местами пары соседних отрезков x_i и x_{i+1}, мы можем расположить эти отрезки в возрастающем порядке — и при этом $\angle X_1OX_k$ увеличится, или расположить их в убывающем порядке — и при этом $\angle X_1OX_k$ уменьшится.

Нам, очевидно, достаточно убедиться, что при $x_i < x_{i+1}$ точка X_{i+1} расположена д а л ь ш е от прямой $X_{i-1}X_i$, чем точка X_{i+1}', т. е. что $X_{i+1}P > X_{i+1}'P'$, где P и P' — проекции точек X_{i+1} и X_{i+1}' на $X_{i-1}X_i$. Но из подобия (прямоугольных) треугольников $OX_{i-1}X_i$ и $X_iX_{i+1}P$ следует, что $\dfrac{X_{i+1}P}{X_iX_{i+1}} = \dfrac{X_{i-1}X_i}{OX_i}$, т. е. $\dfrac{X_{i+1}P}{x_{i+1}} = \dfrac{x_i}{\sqrt{r^2 + x_i^2}}$, откуда $X_{i+1}P = \dfrac{x_ix_{i+1}}{\sqrt{r^2 + x_i^2}}$. Точно так же $\big($с использованием того, что $\triangle OX_{i-1}X_i' \backsim \triangle X_i'X_{i+1}'P'\big)$ выводим

$$X_{i+1}'P' = \frac{x_{i+1}x_i}{\sqrt{r^2 + x_{i+1}^2}},$$

[1]) На рис. 72 изображен случай $i > 1$; случай $i = 1$, где надо положить $X_{i-1} = O$ (этот случай является более простым) предоставляем рассмотреть читателю.

откуда уже и следует, что при $x_i < x_{i+1}$

$$X_{i+1}P > X'_{i+1}P' \quad \text{и} \quad \angle X_{i-1}OX_{i+1} > \angle X_{i-1}OX'_{i+1}.$$

23. Перенесем параллельно все наши прямые так, чтобы они проходили через фиксированную точку O. Полученные 7 прямых разделят полный угол с вершиной O на 14 частей; поэтому хоть один из углов будет меньше (или в случае равенства всех углов — не больше) чем $\frac{360^\circ}{14} = 25\frac{5}{7}^\circ < 26^\circ$. Но углы между перенесенными прямыми будут равны углам между исходными прямыми, что и доказывает утверждение задачи.

24. Наибольшее число острых углов в выпуклом n-угольнике равно *трем* — оно не зависит от n. Действительно, сумма всех внешних углов n-угольника всегда равна $4d$. Но если бы какой-либо n-угольник ($n \geqslant 4$) имел четыре острых внутренних угла, то внешние углы, дополнительные к этим внутренним углам, были бы тупыми, и их сумма была бы больше $4d$; поэтому сумма всех внешних углов и подавно была бы больше $4d$. То, что при любом $n \geqslant 3$ существует n-угольник, имеющий три острых угла, почти очевидно.

25. Начнем с замечания, используемого в решении этой и многих последующих задач. Пусть на плоскости задано какое-либо конечное число n точек; тогда *либо все эти точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ принадлежат одной прямой, либо существует выпуклый m-угольник T* (где $m \leqslant n$) *с вершинами в m из этих точек такой, что остальные $n - m$ точек* (их может и не быть, если $m = n$) *расположены внутри или на границе T* (многоугольник T называется выпуклой оболочкой наших точек). Для доказательства рассмотрим прямую l' такую, что все точки лежат по одну сторону от l', скажем, вертикальную прямую, расположенную слева от всех точек. Будем двигать l' вправо до тех пор, пока она не «упрется» в одну из наших точек (которую мы обозначим буквой M_1). Затем будем вращать полученную прямую l вокруг M_1, скажем, в направлении вращения часовой стрелки, до тех пор, пока она не «упрется» в еще одну из наших точек — в точку M_2; полученную прямую обозначим l_1 (l может и совпасть с l_1; если l_1 проходит через 3 или более из наших точек, то пусть M_2 — самая далекая от M_1 из этих точек; если все точки принадлежат l_1, то рассуждение на этом кончается). Подобным же образом мы будем затем вращать l_1 вокруг M_2 в направлении вращения часовой стрелки до положения l_2, где l_2 проходит через M_2 и еще через одну точку M_3; затем будем вращать l_2 вокруг M_3 до положения l_3, где l_3 проходит через M_3 и еще через одну точку M_4, и т. д. Окончательно мы получим n-угольник $T \equiv M_1M_2 \ldots M_m$ со сторонами $l_1, l_2, \ldots, l_m$, заключающий внутри себя и на границе все наши точки[1]).

а) — в) Заметим прежде всего, что если точки расположены так, что одна или несколько из них лежат внутри выпуклого

[1]) Вот заимствованное не из математики, а из обыденной жизни рассуждение, представляющееся, однако, достаточно убедительным. Будем считать, что наши точки — это колышки на поверхности земли (на плоскости); набросим на эти колышки резиновую ленту, которая стремится сжаться и стать возможно более короткой; тогда эта лента и примет форму искомого многоугольника T.

многоугольника T с вершинами в остальных точках[1]), то хоть один из образованных этими точками углов $\leqslant 30°$ (т. е. $< 45°$, $< 36°$): в том случае, когда точка D лежит внутри треугольника $T \equiv ABC$ с вершинами в трех других точках (рис. 73, *а*)), это следует из того, что сумма 6 углов BAD, CAD; ABD, CBD; BCD, ACD равна 180°, и значит, хоть один из этих углов $\leqslant \frac{180°}{6} = 30°$; если же T имеет больше 3 сторон (рис. 73, *б*), то, чтобы прийти к предыдущему

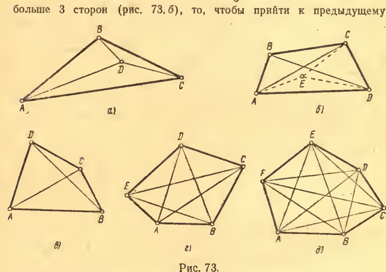


Рис. 73.

случаю, достаточно разбить T на треугольники диагоналями, выходящими из одной вершины. Таким образом, нам остается лишь рассмотреть случай, когда данные точки являются вершинами выпуклого четырехугольника (рис. 73, *в*; задача а)), пятиугольника (рис. 73, *г*; задача б)) или шестиугольника (рис. 73, *д*; задача в)). Но в случае рис. 73, *в* сумма 8 углов BAC, DAC; ABD, CBD; BCA, DCA; CDB, ADB равна 360°, и значит, хоть один из них $\leqslant \frac{360°}{8} = 45°$; в изображенном на рис. 73, *г* случае сумма 15 углов BAC, CAD, DAE; ABE, EBD, DBC; ...; DEC, CEB, BEA равна $180°(5-2) = 3 \cdot 180°$, и хоть один из них $\leqslant \frac{3 \cdot 180°}{15} = 36°$; в изображенном на рис. 73, *д* случае сумма 24 углов BAC, CAD, DAE, EAF; ABF, FBE, EBD, DBC; ...; EFD, DFC, CFB, BFA равна $180°(6-2) = 4 \cdot 180°$, и хоть один из этих углов $\leqslant \frac{4 \cdot 180°}{24} = 30°$.

[1]) Мы считаем, что никакие три из наших точек не принадлежат одной прямой, ибо в противном случае нечего доказывать — см. подстрочное примечание на стр. 25.

Если наши точки расположены в вершинах *правильного* четырехугольника (квадрата), пятиугольника или шестиугольника, то ни один из треугольников с вершинами в трех из наших точек не имеет угла, больше го 45° (соответственно $> 36°$; $> 30°$).

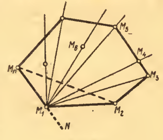


Рис. 74.

г) Пусть точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ пронумерованы так, что $\angle M_nM_1M_2$ — угол выпуклого m-угольника T (где $m \leqslant n$), внутри и на границе которого расположены все наши точки, и что лучи M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, $\ldots$, M_1M_{n-1}, M_1M_n следуют один за другим в этом именно порядке (рис. 74; все эти лучи проходят внутри и по границе угла $M_2M_1M_n$; некоторые из них могут и совпадать). Если N — точка на продолжении луча M_1M_n за точку M_1, то

$$180° = \angle NM_1M_n = \angle NM_1M_2 + \angle M_2M_1M_n =$$
$$= (\angle M_1M_2M_n + \angle M_1M_nM_2) + \underbrace{(\angle M_2M_1M_3 + \angle M_3M_1M_4 + \ldots + \angle M_{n-1}M_1M_n)}_{n \text{ углов}}.$$

Поэтому, *если все углы* $M_iM_jM_k$ (где $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$) *не меньше* α, *то*

$$180° \geqslant n\alpha, \qquad \text{и значит,} \qquad \alpha \leqslant \frac{180°}{n}. \qquad (*)$$

Если наши n точек совпадают с вершинами правильного n-угольника, то ни один из углов $M_iM_jM_k$ не меньше $\frac{180°}{n}$. При этом, для того чтобы неравенство (*) обращалось в равенство, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия (и чтобы эти условия имели место для каждой вершины многоугольника T!):

1) $\angle M_1M_2M_n = \angle M_1M_nM_2 \left(= \frac{180°}{n} = \alpha\right)$, т. е. чтобы было $M_1M_2 = M_1M_n$ (и чтобы были равны каждые две соседние стороны многоугольника T, т. е. чтобы этот многоугольник был *равносторонним*);

2) $\angle M_2M_1M_n = \angle M_2M_1M_3 + \angle M_3M_1M_4 + \ldots + \angle M_{n-1}M_1M_n = \frac{180°(n-2)}{n} (= (n-2)\alpha)$ — и таким же было бы значение каждого угла многоугольника M, т. е. чтобы этот многоугольник был *равноугольным* $\left(\text{с углом } \frac{180°(n-2)}{n}\right)$.

Таким образом, ни один из углов $M_iM_jM_k$ не меньше $\frac{180°}{n}$ только для системы n точек, совпадающей с *вершинами правильного* n-угольника.

26. Снова начнем с построения выпуклого многоугольника T (выпуклой оболочки наших точек; см. начало решения задачи 25), внутри и на границе которого расположены все наши точки, а вершины совпадают с какими-то из них. Далее, если точка D лежит внутри $\triangle ABC \equiv T$ (рис. 73, *а*), то поскольку $\angle ADB + \angle BDC + + \angle CDA = 360°$, то хоть один из углов ADB, BDC, CDA будет $\geqslant \frac{360°}{3} = 120°$ (т. е. $> 90°$; $> 108°$); если же точка E лежит внутри m-угольника T с вершинами в m из нашнх точек, где $m \geqslant 4$, то достаточно разбить T на треугольники днагоналями, выходящими нз одной вершины (рис. 73, *б*). Таким образом, остается рассмотреть случай, когда данные точки являются вершинами выпуклого многоугольника.

Но сумма углов выпуклого n-угольника, где $n = 4$, 5 и 6, соответственно равна $180°(4-2) = 360°$, $180° \cdot 3$ и $180° \cdot 4$; поэтому хоть один угол выпуклого четырехугольника $\geqslant \frac{360°}{4} = 90°$, хоть один угол выпуклого пятиугольника $\geqslant \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$ и хоть один угол выпуклого шестиугольника $\geqslant \frac{4 \cdot 180°}{6} = 120°$, что и доказывает утверждення задачи.

Из решения задач а) — в) следует, что никакие три из наших точек не образуют треугольника с углом, б о л ь ш и м 90°, соответственно большим 108° или 120°, лишь в том случае, когда точки являются вершинами выпуклого *равноугольного* четырехугольника (прямоугольника), равноугольного пятиугольника или равноугольного шестиугольника (см. также начало решения задачи 27).

27. а) Заметим, что *если из числа шести точек* A, B, C, D, E, F *плоскости нельзя выбрать трех, образующих треугольник с б о л ь ш и м 120° углом, то эти шесть точек обязательно являются вершинами шестиугольника, все углы которого равны* 120° (ср. с решением задачи 26 в)). В самом деле, если точки D, E и F лежат внутри треугольника $T = ABC$ (ср. рис. 73, *а*), то каждый из углов ADB, BDC и $CDA \leqslant 120°$, лишь если D — точка, из которой все стороны треугольника видны под углом в 120°; но также и каждый из углов AEB, BEC, CEA не превосходит 120° лишь в аналогичном случае, что невозможно, если точки D и E различны [1]). Если точки E и F лежат внутри выпуклого *четырехугольника* $T = ABCD$, то E обязательно принадлежит двум треугольникам с вершинами в наших точках, например треугольникам ABC и ABD; но тогда, согласно сказанному выше, ни один из образованных нашими точками углов не превосходит 120° лишь в том случае, если из E все стороны о б о и х треугольников видны под углами в 120°, что явно невозможно. Так же опровергается и предположение, что точка F лежит внутри выпуклого *пятиугольника* $T \equiv ABCDE$, когда она тоже обязательно принадлежит сразу н е с к о л ь к и м треугольникам с вершинами в наших точках.

---

[1]) Нетрудно видеть, что внутри треугольника имеется либо е д и н с т в е н н а я точка, из которой все стороны треугольника видны под углами в 120°, либо н и о д н о й такой точки (ср. с решением задачи 75 книги [4]).

Предположим теперь, что нам дано больше шести точек плоскости. Если никакие три из них не образуют треугольника с большим 120° углом, то первые шесть точек A, B, C, D, E, F должны образовывать шестиугольник, все углы которого равны 120°. Если же G — еще какая-то из наших точек, то и шесть точек A, B, C, D, E и G также должны являться вершинами шестиугольника, все углы которого равны 120°; но это явно невозможно, если G отлична от F.

б) Пусть $ABCDEF$ — произвольный шестиугольник, все углы которого равны 120°. В таком случае ни один из треугольников, образованных тремя из точек A, B, C, D, E и F, не имеет большего 120° угла (ср. с решениями задач 26 в), 27 а)). Пусть, далее, G — точка биссектрисы FG угла AFE, очень близкая к вершине F

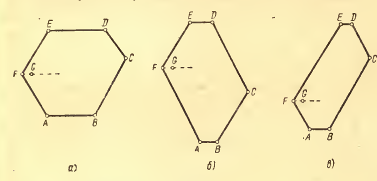


Рис. 75.

(рис. 75, а). Если заменить точку F точкой G, то мы придем к шестиугольнику $ABCDEG$, весьма близкому к шестиугольнику $ABCDEF$; при этом все углы каждого из треугольников, образованных любыми тремя из точек A, B, C, D, E и G будут не превосходить наибольшего из углов шестиугольника $ABCDEG$ (угла AGE), который можно сделать сколь угодно близкими к 120° и, в частности, меньшим угла φ, — для этого надо только выбрать точку G так, чтобы расстояние FG было достаточно мало. Таким образом, нам остается лишь проследить за тем, чтобы все углы треугольников AFG, BFG, CFG, DFG и EFG были меньше φ.

Ясно, что поскольку $\angle AFG = \angle EFG = 60°$, то треугольники AFG и EFG никак не могут иметь большего 120° угла; поэтому условие задачи будет выполнено, если мы добьемся, чтобы наибольшие углы треугольников BFG, CFG и DFG были меньше φ. Но если стороны AB и ED очень малы (по сравнению со сторонами FA и FE), то направления сторон FB и GB треугольника BFG будут очень близки к направлению стороны FA шестиугольника, а направления сторон FD и GD треугольника DFG — к направлению стороны FE шестиугольника: ведь для того, чтобы попасть из точки F в точку B, надо сместиться в направлении FA на расстояние FA, а затем сместиться из точки A на гораздо меньшее расстояние AB (рис. 75, б). При этом угол BFG и угол BGG_1, где G_1 — точка на продолжении отрезка FG за точку G, будут очень близки к углу

AFG, равиому 60°, а угол BGF будет очень близок к 120°; в частности, если отношенне $\frac{AB}{FA}$ достаточно мало, то этот угол будет меньше угла φ. Точно так же угол DGF тоже будет меньше угла φ, если только отношение $\frac{ED}{FE}$ достаточно мало. (Можно также сделать отрезки AB и ED равными малому отрезку FG; при этом будем иметь $\angle BGF = \angle DGF = 120°$ — см. ниже рис. 76.)

Наконец, предположим еще дополнительно, что сторона FE (и параллельная ей сторона BC) во много раз больше стороны DC (и стороны FA; рис. 75, *в*). При этом направления сторон FC и GC треугольника CFG будут весьма близки к направлению стороны FE шестиугольника: ведь для того, чтобы попасть из точки F в точку C, нам надо сместиться в направлении FE на расстояние FE, а затем еще сместиться на гораздо меньшие расстояния ED и DC. Поэтому углы CFG и CGG_1 будут в этом случае весьма близки к $\angle EFG = 60°$, а угол CGF будет очень близок к 120°; в частности, если отношения $\frac{CD}{FE}$ и $\frac{ED}{FE}$ будут достаточно малы, то угол CGF будет меньше заданного угла φ.

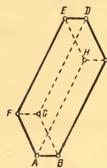


Рис. 76.

Таким образом, для того чтобы все углы всех треугольников, образованные тремя из точек A, B, C, D, E, F и G, были меньше φ, надо только, чтобы расстояние FG и отношения $\frac{AB}{FA}$, $\frac{ED}{FE}$, $\frac{FA}{BC}$ и $\frac{CD}{FE}$ были достаточно малыми.

в) Ясно, что, как бы ни были расположены на плоскости восемь точек A, B, C, D, E, F, G, H, из них можно выбрать три, образующие треугольник, один из углов которого $> 120°$ (см. решение задачи а)). Пусть, далее, $ABCDEF$ — центрально-симметричный шестиугольник, все углы которого равны 120°, и G и H — такие точки внутри него, что $FG \# CH \# AB$ (рис. 76). Если отношения $\frac{AB}{FA}$ и $\frac{FA}{FE}$ будут достаточно малы, то все углы всех треугольников, образованных какими-либо тремя из точек A, B, C, D, E, F, G и H, будут меньше любого заданного угла $\varphi > 120°$ (ср. с решением задачи б)).

28. а) Если все наши точки принадлежат отрезку, то два наименьших угла равны 0 (т. е. $\alpha_2 = 0$; ср. с задачей 29); если точка D принадлежит $\triangle ABC$, то два угла треугольника, скажем, A и B, острые и меньшие из «частей» BAD и CAD, соответственно ABD и CBD, этих углов $< 45°$; таким образом, нам остается рассмотреть случай *выпуклого четырехугольника* $ABCD$ (см. начало решения задачи 25). Так как, например, $\angle ABD + \angle BDA + \angle DAC + \angle BAC = 180°$ и $\angle CBD + \angle BDC + \angle BCA + \angle DCA = 180°$, то каждая четверка углов содержит угол, не превосходящий $45° \left(= \frac{180°}{4}\right)$, чем и доказывается, что $\alpha_2 \leqslant 45°$. Если $ABCD$ — квадрат (и только в этом случае!), угол α_2 равен 45°.

б) Если все наши точки принадлежат отрезку, то два бóльших угла равны 180° (т. е. $\beta_2 = 180°$; см. задачу 29); если D — точка внутри треугольника ABC, то два из трех «внутренних» углов ADB, BDC и CDA будут $\geqslant 90°$. Пусть теперь $ABCD$ — выпуклый четырехугольник и D — его наибольший угол. В этом случае $\angle D \geqslant 90°$; кроме того, $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDB + \angle BDA = 360°$, и значит, хоть один из этих пяти углов $\geqslant 72° \left(= \frac{360°}{5}\right)$, чем и устанавливается, что $\beta_2 \geqslant 72°$.

Равенство $\beta_2 = 72°$ достигается, если каждый из фигурирующих в последней сумме пяти углов равен 72°.

29. Рассмотрим n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, *принадлежащих одной прямой.* Ясно, что в этом случае все углы $M_iM_jM_k$ равны 0 или 180°; нам надо только определить число $P(n)$ углов, равных 0 и число $Q(n)$ углов, равных 180°.

Если точки расположены на прямой в «естественном» порядке: $M_1, M_2, M_3, \ldots$, и т. д., то 180° равны $1 \cdot (n-2)$ углов $M_iM_2M_j$ с вершиной M_2 (здесь i обязательно равно 1, а j может принимать любое из $n-2$ значений $3, 4, \ldots, n$); $2(n-3)$ углов $M_iM_3M_j$ с вершиной M_3 (i может равняться 1 или 2, а $j = 4, 5, \ldots, n$), $3(n-4)$ углов $M_iM_4M_j$ с вершиной M_4; ...; $(n-2) \cdot 1$ углов $M_iM_{n-1}M_j$ с вершиной M_{n-1}. Таким образом, общее число $Q(n)$ углов, равных 180°, таково:

$$Q(n) = 1 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-3) + 3 \cdot (n-4) + \ldots + (n-2) \cdot 1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6};$$

последнее равенство легко получить, пользуясь, например, методом математической индукции[1]).

Число $P(n)$ равных 0 углов можно найти из формулы[2])

$$P(N) = N(n) - Q(n) \left(= \frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \right)$$

или подсчитать тем же методом, что и выше, — при этом получится формула[1])

$$P(n) = C_{n-1}^2 + C_{n-2}^2 + \left(C_2^2 + C_{n-3}^2\right) + \left(C_3^2 + C_{n-4}^2\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(C_{n-3}^2 + C_2^2\right) + C_{n-2}^2 + C_{n-1}^2 =$$
$$= 2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \ldots + \frac{1 \cdot 2}{2}\right] = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

(почему?).

[1]) См., например, И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом, О математической индукции, М., «Наука», 1967, § 1 части I, в частности пример 6 на стр. 18.

[2]) См. подстрочное примечание на стр. 26.

30. Утверждение задачи вытекает из того, что каждый треугольник имеет угол, не превосходящий 60°, и угол, не меньший 60° (ср. выше, стр. 22—23; при этом, если тетраэдр (треугольная пирамида) $ABCD$ *правильный*, т. е. все его грани — правильные треугольники, то ни один из треугольников ABC, ABD, ACD и BCD не имеет угла, большего 60°, и ни один из них не имеет угла, меньшего 60°.

31. а) Рассмотрим выпуклый многоугольник T с вершинами в каких-то из наших точек, содержащий внутри себя остальные точки (см. начало решения задачи 25). При этом

1° Если число вершин T больше четырех, то хоть один угол его тупой (ср. задачу 24); но это значит, что некоторые три из наших точек (совпадающие с тремя вершинами T) образуют *тупоугольный* треугольник.

2° Если число вершин T равно четырем, то ни один из его углов не является тупым лишь в том случае, если T — *прямоугольник* $ABCD$. При этом внутри $ABCD$ не может лежать ни одна из наших точек, ибо если бы такая точка E нашлась, то из условия о том, что ни один из четырех углов AEB, BEC, CED и DEA, сумма которых равна 360°, не тупой, вытекало бы, что все эти четыре угла прямые; но это значило бы, что $AEC = 180° > 90°$.

3° Если число вершин T равно трем, то внутри $T \equiv ABC$ также не может лежать ни одна из наших точек, так как если E — внутренняя точка треугольника ABC, то хоть один из трех углов AEB, BEC и CEA, сумма которых равна 360°, — тупой.

Таким образом, возможное число точек, удовлетворяющих условию задачи, — *три* (вершины *остроугольного* или *прямоугольного треугольника*) или *четыре* (вершины *прямоугольника*).

б) Ясно, что в пространстве можно указать восемь точек, обладающих требуемым свойством: примером такой системы точек может служить система вершин прямоугольного параллелепипеда (например, *куба*). Покажем теперь, что *если система n точек M_1, M_2, ..., M_n пространства такова, что ни один из углов $M_iM_jM_k$* (где i, j, k — какие-то три из номеров 1, 2, ..., n) *не является тупым, то $n \leqslant 8$.*

Пусть Т — выпуклая оболочка наших точек, т. е. *наименьший выпуклый многогранник, содержащий внутри себя* (*и на границе*) *все точки* M_1, M_2, ..., M_n. Этот многогранник можно построить аналогично тому, как на плоскости строится выпуклая оболочка конечного множества точек (см. начало решения задачи 25). А именно, выберем «достаточно далекую» плоскость π, т. е. такую, что все точки M_1, ..., M_n расположены по одну сторону от π. Далее будем сдвигать эту плоскость параллельно самой себе, приближая ее к нашим точкам до тех пор, пока она не «наткнется» на одну из них, скажем, на точку M_1. После этого начнем поворачивать плоскость вокруг любой проходящей через M_1 прямой; при этом плоскость в конце концов «наткнется» на еще одну из наших точек — на точку M_2. Далее будем поворачивать полученную плоскость уже вокруг прямой M_1M_2 до тех пор, пока мы не придем к такой плоскости π_1, что в этой плоскости лежат три или больше из наших точек; причем лежащие в плоскости π_1 точки можно заключить в (плоский) выпуклый многоугольник $\Gamma_1 \equiv M_1M_2 \ldots M_n$, вершинами которого являются некоторые из наших точек — в выпуклую оболочку принадлежащих π_1 точек (см. начало решения задачи 25).

Теперь начнем поворачивать плоскость π_1 вокруг прямой M_1M_2 в противоположном направлении, пока мы не придем к плоскости π_2, содержащей три или больше из наших точек; все эти точки лежат в вершинах и внутри некоторого выпуклого многоугольника Γ_2, представляющего собой смежную с Γ_1 грань искомого многогранника Т. Затем будем поворачивать π_1 вокруг прямой M_2M_3 в такую сторону, чтобы все наши точки, не принадлежащие прямой M_2M_3, оставались с одной стороны от плоскости; при этом мы также в какой-то момент «наткнемся» на одну из наших точек, что определит новую плоскость π_3, в которой имеется выпуклый многоугольник Γ_3, вершины которого совпадают с нашими точками — выпуклая оболочка принадлежащих π_3 точек; Γ_3 явится еще одной (также смежной с Γ_1) гранью многогранника Т. Продолжим этот процесс, поворачивая сначала плоскость π_1 вокруг всех сторон многоугольника Γ_1, а затем поступая таким же образом с плоскостями π_2, π_3, ... Так как всего точек у нас — конечное число, то мы в конце концов получим выпуклый многогранник Т, все вершины которого совпадают с какими-то из наших точек и такой, что в с е точки M_1, M_2, ..., M_n лежат внутри или на границе этого многогранника [1]).

Заметим теперь, что в нашем случае *все точки* M_1, M_2, ..., M_n *будут служить вершинами многогранника* Т. В самом деле, ни одна из наших точек не может, разумеется, принадлежать ребру многогранника *T*, так как иначе некоторый угол $M_iM_jM_k$ был бы равен 180°. Далее, каждая грань π_i многогранника Т (где i — один из номеров 1, 2, ...) может содержать *не больше четырех* из наших точек, причем эти точки являются либо вершинами (остроугольного или прямоугольного) треугольника Γ_i, либо вершинами прямоугольника Γ_i (ср. с решением задачи а)). Наконец, никакая из наших точек не может лежать в н у т р и многогранника Т. В самом деле, если бы точка M_p лежала внутри Т, то проходящая через M_p плоскость λ, перпендикулярная отрезку M_1M_p, рассекала бы многогранник Т на две части; при этом та часть Т, которая расположена с другой стороны от λ, чем точка M_1, также должна была бы содержать некоторые из наших точек; но если M_q — какая-либо такая точка, то $\angle M_1M_pM_q$ — т у п о й (почему?).

Далее, *если* M_i *и* M_j — *две вершины* Т, *то весь многогранник* Т *целиком заключается внутри «слоя», ограниченного проходящими через* M_i *и через* M_j *плоскостями* λ_i *и* λ_j, *перпендикулярными отрезку* M_iM_j. В самом деле, некоторая часть многогранника Т лишь в том случае могла бы лежать, скажем, по другую сторону от плоскости λ_j, чем точка M_i, если бы по эту сторону от λ_j имелись бы точки нашей системы; но если бы существовала такая точка M_k, то $\angle M_iM_jM_k$ был бы т у п ы м.

Обозначим теперь через T_2, T_3, ..., T_n многогранники, получающиеся из многогранника Т параллельными переносами соответственно на векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, ..., $\overline{M_1M_n}$. Мы утверждаем, что *никакие два из этих многогранников не пересекаются.* В самом деле, если многогранник $T_1 \equiv T$ лежит, скажем, «выше» проходящей

[1]) Многогранник Т можно представлять себе как образованный натянутой на точки M_1, M_2, ..., M_n «резиновой пленкой», которая стремится сократиться, в то время как эти точки ее удерживают (ср. со сказанным в сноске на стр. 141).

через точку M_1 и перпендикулярной отрезку M_1M_i плоскости λ_1 (эта плоскость предполагается здесь горизонтальной), то многогранник T_i лежит «выше» параллельной λ_1 плоскости λ_i, проходящей через вершину M_i многогранника T_1 (плоскость λ_i получается из λ_1 параллельным переносом на вектор $\overline{M_1M_i}$). А так как, по доказанному выше, многогранник T_1 расположен «ниже» плоскости λ_i, то многогранники T и T_i не могут пересечься. Аналогично доказывается, что не могут пересечься и многогранники T_i и T_j, где $i, j \neq 1$ (заметим, что многогранник T_j получается из многогранника T_i с вершиной M_i параллельным переносом на вектор $\overline{M_iM_1} + \overline{M_1M_j} = \overline{M_iM_j}$).

Наконец, заметим, что все многогранники $T = T_1, T_2, \ldots, T_n$ заключены внутри вдвое большего T по линейным размерам многогранника Σ, вершинами которого служат точки $M_1, M_2', \ldots, M_n'$, где $\overline{M_1M_i'} = 2\,\overline{M_1M_i}$ (и $i = 2, 3, \ldots, n$). В самом деле, многогранник T_1, очевидно, целиком заключен внутри многогранника Σ. Далее, произвольная точка P' многогранника T_i (где i — один из номеров 2, 3, ... или n) получается параллельным переносом на вектор $\overline{M_1M_i}$ из некоторой точки P многогранника T_1; поэтому $\overline{PP'} = \overline{M_1M_i}$, и значит, $M_1PP'M_i$ — п а р а л л е л о г р а м м. Но отсюда следует, что середина Q отрезка M_1P' совпадает с серединой отрезка PM_i и, значит, принадлежит выпуклому многограннику T_1. Но если середина отрезка M_1P' принадлежит многограннику T_1, то точка P' принадлежит многограннику Σ, «гомотетичному» T_1 с центром гомотетии (или «растяжения от точки») M_1 и коэффициентом гомотетии (растяжения), равным 2.

Так как многогранники $T_1, T_2, \ldots, T_n$ попарно не пересекаются и все принадлежат многограннику Σ, то

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n \leqslant V,$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — объемы многогранников $T_1, T_2, \ldots, T_n$, а V — объем многогранника Σ. Но, очевидно,

$$v_2 = v_3 = \ldots = v_n = v_1,$$

и поскольку линейные размеры многогранника Σ вдвое больше линейных размеров многогранника T_1,

$$V = 8v_1.$$

Таким образом, имеем

$$nv_1 \leqslant 8v_1,$$

откуда и следует, что

$$n \leqslant 8.$$

П р и м е ч а н и е. Из решения задачи б) вытекает, что равенство $n = 8$ может иметь место т о л ь к о в том случае, когда восемь многогранников $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_8$ (где выпуклый многогранник $T_1 \equiv M_1M_2M_3 \ldots M_8$ имеет восемь вершин) полностью заполняют многогранник $\Sigma \equiv M_1M_2' \ldots M_8'$ вдвое больших, чем T, линейных размеров, что возможно, только если $M_1M_2M_3 \ldots M_8$ — *прямоугольный параллелепипед* (почему?)

Укажем еще, что в точности такие же рассуждения показывают, что наибольшее число точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ m-мерного евклидова пространства (см. подстрочное примечание на стр. 32), таких, что ни один из углов $M_iM_jM_k$ (где $i, j, k = 1, 2, \ldots$ или n) не является тупым, равно 2^m (соответствующие точки являются вершинами *прямоугольного параллелотопа* — в частности *куба* — m-мерного пространства).

32. а) Так как уже четырехугольник на плоскости не может иметь только острые углы (ср. с решением задачи 31 а)), то искомое число точек $n = 3$; эти три точки должны являться вершинами *остроугольного треугольника*.

б) И здесь, подобно решению задачи 31 б), мы рассмотрим *наименьший выпуклый многогранник* Т, содержащий внутри и на границе все наши точки; этот многогранник должен представлять собой выпуклый n-вершинник с вершинами $M_1, M_2, \ldots, M_n$, все грани которого, в силу результата задачи а), являются *остроугольными треугольниками* (ср. с решением задачи 31 б)).

Ясно, что легко найти сколько угодно таких выпуклых «4-вершинников» (треугольных пирамид — тетраэдров), откуда следует, что 4 точки условию задачи удовлетворять могут. Выясним теперь, какое строение может иметь удовлетворяющий условию задачи «5-вершинник».

Воспользуемся теоремой Эйлера[1]), в силу которой число вершин B, число ребер P и число граней Γ любого выпуклого многогранника связаны зависимостью

$$B - P + \Gamma = 2. \qquad (Э)$$

В нашем случае $B = 5$; с другой стороны, так как каждая из Γ граней содержит по 3 ребра и каждое из ребер при счете «по граням» засчитывается дважды (ибо оно принадлежит двум граням), то $P = \frac{3}{2}\Gamma$. Таким образом, получаем

$$5 - \frac{3}{2}\Gamma + \Gamma = 2, \quad \text{откуда} \quad \Gamma = 6 \quad \text{и} \quad P = \frac{3}{2}\Gamma = 9.$$

---

[1]) См., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3: Геометрия (стереометрия), задача 48 и след.; по поводу других доказательств и обсуждения теоремы Эйлера см. также книги [2], [3], [8], [24]; Д. Пойа, Математическое открытие, М., «Наука», 1970; Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1965; Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, М., Гостехиздат, 1956; И. Лакатос, Доказательства и опровержения, М., «Наука», 1967; И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом, О математической индукции, М., «Наука», 1967; статью В. Г. Ашкинузе, Многоугольники и многогранники, Энциклопедия элементарной математики, кн. IV (геометрия), М., Физматгиз, 1963, стр. 382—448.

Заметим еще, что использование теоремы Эйлера и связанных с ней расчетов для выяснения строения 5-вершинника Т представляет собой типичную «стрельбу из пушек по воробьям», ибо здесь соответствующая задача весьма проста (всего 5 вершин; треугольные грани); однако уже в случае $n = 6$ использование этой теоремы можно считать оправданным.

Далее, так как общее число вершин равно всего 5, то Т, разумеется, не может иметь пятигранных углов (ибо ребра Т могут соединять какую-либо вершину M_1 максимум с четырьмя другими вершинами); число трехгранных и четырехгранных вершин обозначим через B_3 и B_4. При этом считая ребра Т «по вершинам», мы снова получим удвоенное их число (ибо каждое ребро соединяет две вершины); поэтому, кроме очевидного равенства

$$B_3 + B_4 = B = 5,$$

мы еще можем написать

$$3B_3 + 4B_4 = 2P = 18;$$

решая эту систему двух уравнений, получаем $B_3 = 2$ и $B_4 = 3$. Отсюда вытекает, что пятивершинник Т имеет схематический вид [1]), изображенный на рис. 77, т. е. представляет собой треугольную бипирамиду, или «битетраэдр» (два тетраэдра, сложенных равными основаниями).

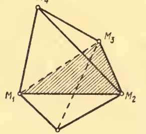


Рис. 77.

Нетрудно убедиться в существовании удовлетворяющего всем нашим условиям битетраэдра Т, откуда вытекает, что и 5 точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, удовлетворяющих условию задачи, существовать могут. Для примера рассмотрим правильную треугольную пирамиду (тетраэдр) $M_1M_2M_3M_4'$ с основанием $M_1M_2M_3$ (рис. 78, *а*).

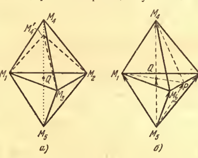


Рис. 78.

[1]) Рис. 77, как и рис. 79, *а*, *б* ниже, изображают «комбинаторный тип» многогранника, т. е. передают лишь схему взаимного расположения его вершин, ребер и граней (число k-угольных граней и l-гранных вершин, где k и $l = 3, 4, \ldots$; «соседство» отдельных граней или вершин, где соседние грани являются смежными по ребру, а соседние вершины соединены ребром, и т. д.), но не «размеры» многогранника, т. е. не длины его ребер, площади граней, величины плоских и двугранных углов, и т. д. (ср., например, стр. 20 и след. названной в предыдущем подстрочном примечании книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома).

Если плоские углы при вершине этого тетраэдра *прямые*, то угол φ_0 ребра $M_4'M_1$ с плоскостью основания таков, что (заметьте, что если стороны треугольника $M_1M_2M_3$ равны 1, то катеты треугольника $M_1M_2M_4'$ равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$\cos\varphi_0 = \frac{M_1Q}{M_1M_4'} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{6}}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_0 < 45^\circ.$$

Поэтому, если мы слегка «поднимем» вершину M_4' тетраэдра $M_1M_2M_3M_4'$ (после чего плоские углы при новой вершине M_4 станут *острыми*), то угол φ боковых ребер с плоскостью основания все еще будет $<45^\circ$, и, симметрично отразив вершину M_4 относительно плоскости $M_1M_2M_3$, мы придем к битетраэдру $M_4M_1M_2M_3M_5$, вершины которого удовлетворяют всем условиям задачи. При этом малое варьирование положения вершин полученного битетраэдра $M_4M_1M_2M_3M_5$ приводит к и н ы м системам пяти точек, удовлетворяющих условию задачи, откуда вытекает существование *бесконечного* числа различных (т. е. не подобных) пятерок точек $M_1, \ldots, M_5$ пространства, таких, что все углы $M_iM_jM_k$ острые. Однако *шести точек M_1, M_2, ..., M_6, удовлетворяющих требуемым условиям*, уже н е с у щ е с т в у е т; доказательство этого и составляет главную часть решения задачи.

Возвращаясь к рис. 78, *а*, заметим, что (при том же предположении $M_2M_3 = 1$)

$$1 = M_4'M_2^2 + M_4'M_3^2 \approx M_4M_2^2 + M_4M_3^2 < M_1M_2^2 + M_1M_3^2 = 2.$$

Оказывается, что именно это обстоятельство позволяет достроить требуемый битетраэдр, «продолжая» пирамиду $M_4M_1M_2M_3$ за основание $M_1M_2M_3$: в случае удовлетворяющего всем условиям задачи битетраэдра $M_4M_1M_2M_3M_5$ (рис. 77) обязательно

$$M_4M_2^2 + M_4M_3^2 < M_1M_2^2 + M_1M_3^2. \qquad (*)$$

Неравенство (*) можно установить разными способами, хотя совсем простого доказательства оно не имеет: ведь при его выводе нам необходимо использовать в с е условия задачи, в том числе и относящиеся к (не фигурирующей в (*)!) точке M_5. Мы докажем его с помощью аппарата *векторной алгебры*.

Обозначим векторы $\overline{M_5M_1}$, $\overline{M_5M_2}$, $\overline{M_5M_3}$ и $\overline{M_5M_4}$ (рис. 78, *б*) через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_4$. Эти векторы не независимы: если плоскость $M_1M_4M_5$ пересекает отрезок M_2M_3 в точке P и плоскость $M_1M_2M_3$ пересекает отрезок M_4M_5 в точке Q, то

$$\overline{M_5P} = \lambda\boldsymbol{a}_2 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{a}_3, \qquad \text{где} \quad \lambda = \frac{M_3P}{M_3M_2},$$

и

$$\overline{M_5Q} = \mu\overline{M_5P} + (1-\mu)\,\boldsymbol{a}_1, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{M_1Q}{M_1P},$$

так что

$$\overline{M_5Q} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3,$$

где

$$\alpha_1 = 1 - \mu, \qquad \alpha_2 = \mu\lambda, \qquad \alpha_3 = \mu(1-\lambda),$$

т. е.

$$0 < \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 < 1 \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1-\mu) + \mu\lambda + \mu(1-\lambda) = 1.$$

А так как $a_4 = \overline{M_5M_4} = \nu\overline{M_5Q}$, где $\nu = \frac{M_5M_4}{M_5Q} > 1$, то

$$a_4 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3,$$

где $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 > 0$ и $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \nu > 1$.

До сих пор мы все еще не использовали того обстоятельства, что все углы $M_iM_jM_k$ являются *острыми*. На языке векторной алгебры это означает, что все *скалярные произведения* a_ia_j (где $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$ или 4) *положительны* (ибо скалярное произведение векторов, образующих острый угол, положительно!); нам понадобится еще *положительность скалярных произведений* $\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)$ и $\overline{M_kM_5}\cdot\overline{M_kM_4} = -a_k(a_4 - a_k) = a_k(a_k - a_4)$, где $k = 1,\ 2$ или 3 (заметьте, что из неравенства $a_k(a_k - a_4) > 0$ следует: $a_k^2 > a_ka_4$). Из последних неравенств, в частности, вытекает, что не только $0 < \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 < 1$, но и $0 < \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 < 1$; так, например,

$$a_1^2 > a_1a_4 = a_1(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \beta_3a_3) =$$

$$= \beta_1a_1^2 + \beta_2(a_1a_2) + \beta_3(a_1a_3) > \beta_1a_1^2,$$

откуда и следует, что

$$\beta_1 < 1$$

(так же можно вывести и неравенства $\beta_2 < 1,\ \beta_3 < 1$, которые нам, впрочем, не понадобятся). Далее имеем

$$(a_2 - a_4)(a_3 - a_4) = a_2a_3 - (a_2 + a_3)\,a_4 + a_4^2 =$$

$$= a_2a_3 - (a_2 + a_3)(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \beta_3a_3) + a_4(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \beta_3a_3) <$$

$$< (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\,a_2a_3 - (a_2 + a_3)(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \beta_3a_3) +$$

$$+ a_4(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \beta_3a_3) = \beta_1(a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3 + a_1a_4) -$$

$$- \beta_2\left(a_2^2 - a_2a_4\right) - \beta_3\left(a_3^2 - a_3a_4\right) < \beta_1\left(a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3 + a_1^2\right) =$$

$$= \beta_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) < (a_2 - a_1)(a_3 - a_1).$$

Но отсюда уже непосредственно следует неравенство (*), поскольку

$$M_4M_2^2 + M_4M_3^2 = \overline{M_4M_2}^2 + \overline{M_4M_3}^2 = (a_2 - a_4)^2 + (a_3 - a_4)^2 =$$

$$= a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_4 - 2a_3a_4 + 2a_4^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 +$$

$$+ 2\left(a_2a_3 - a_2a_4 - a_3a_4 + a_4^2\right) = (a_2 - a_3)^2 + 2(a_2 - a_4)(a_3 - a_4),$$

а

$$M_1M_2^2 + M_1M_3^2 = \overline{M_1M_2}^2 + \overline{M_1M_3}^2 = (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)^2 =$$

$$= (a_2 - a_3)^2 + 2(a_2 - a_1)(a_3 - a_1).$$

Перейдем теперь к случаю *шести* точек $M_1, M_2, \ldots, M_6$ пространства, удовлетворяющих условию задачи (несколько позже мы убедимся, что этот случай невозможен). Отвечающий этим точкам «шестивершинник» T с вершинами $M_1, \ldots, M_6$ должен иметь Γ треугольных граней и (ср. со сказанным на стр. 151 про пятивершинник $M_4M_1M_2M_3M_5$) $P = \frac{3}{2}\Gamma$ ребер; так как число вершин B тут равно 6, то из формулы Эйлера (Э) следует

$$6 - \frac{3}{2}\Gamma + \Gamma = 2, \quad \text{а значит,} \quad \Gamma = 8 \quad \text{и} \quad P = \frac{3}{2}\Gamma = 12.$$

Далее обозначим, подобно тому как мы поступали выше, число трехгранных, четырехгранных и пятигранных вершин T через B_3, B_4 и B_5 (шестигранных вершин шестивершинник T, очевидно, не имеет). Считая все ребра «по вершинам», из которых они исходят, получаем

$$3B_3 + 4B_4 + 5B_5 = 2P = 24. \qquad (1)$$

Но $B_3 + B_4 + B_5 = B = 6$, т. е.

$$4B_3 + 4B_4 + 4B_5 = 4 \cdot 6 = 24. \qquad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) следует, что $B_3 = B_5$. Поэтому, если $B_5 = 0$, то и $B_3 = 0$; следовательно, в этом случае мы имеем $B_4 = B = 6$, и многогранник T ограничен восемью треугольными гранями, которые сходятся по четыре в шести вершинах, т. е. имеет строение, изображенное на рис. 79, *а*. Если же $B_5 = 1$, то T имеет

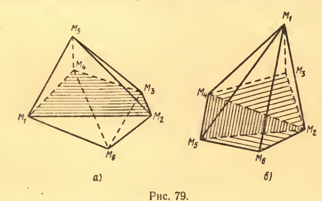


Рис. 79.

вершину M_1, из которой выходят ребра M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, M_1M_5 и M_1M_6, ведущие во в с е остальные вершины многогранника; при этом наряду с этими пятью ребрами и пятью ребрами M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, M_5M_6 и M_6M_2, «замыкающими» сходящиеся в M_1 пять треугольных граней, T имеет еще два ребра, разбивающие (искривленное!) «основание» $M_2M_3M_4M_5M_6$ многогранника на три треугольника; приняв, что эти ребра суть M_2M_4 и M_2M_5, мы придем к многограннику T, изображенному на рис. 79, *б*.

Но в случае изображенной на рис. 79, *а* четырехугольной бипирамиды (октаэдра) $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ применение неравенства (*) к «остроугольному битетраэдру» $M_1M_2M_4M_5M_6$ дает

$$M_6M_2^2 + M_6M_4^2 < M_1M_2^2 + M_1M_4^2,$$

а то же неравенство в применении к «остроугольному битетраэдру» $M_2M_4M_6M_3M_1$, дает

$$M_1M_2^2 + M_1M_4^2 < M_6M_2^2 + M_6M_4^2,$$

что и доказывает невозможность рассматриваемого расположения шести точек $M_1, \ldots, M_6$, удовлетворяющих условию задачи. В случае многогранника Т, изображенного на рис. 79, *б*, применение неравенства (*) к «остроугольному битетраэдру» $M_1M_2M_5M_6M_4$ дает

$$M_1M_4^2 + M_1M_2^2 < M_5M_4^2 + M_5M_2^2,$$

а это же неравенство в применении к битетраэдру $M_4M_2M_4M_3M_5$ дает

$$M_5M_4^2 + M_5M_2^2 < M_1M_4^2 + M_1M_2^2,$$

что доказывает невозможность и такого расположения шести точек.

Итак, *число точек пространства, совместимое с условиями задачи, может быть равно* 3, 4 *или* 5.

33. а) Рассмотрим какую-либо конечную систему точек, удовлетворяющих условию задачи, и пусть AB — наибольшее (или одно из наибольших) среди попарных расстояний между нашими точками. Если C — какая угодно отличная от A и B точка нашей системы, то треугольник ABC прямоугольный, и AB — его наибольшая сторона; поэтому *точка C принадлежит окружности S с диаметром AB*. Пусть D — еще одна из наших точек. Эта точка также должна лежать на окружности S; кроме того, как как треугольник ACD, вписанный в окружность S, прямоугольный, то одна из хорд AC, AD и CD должна совпадать с диаметром S; так как точки C и D отличны от B, то диаметром может служить только хорда CD. Если E — еще одна точка системы, то она также принадлежит S и тоже диаметрально противоположна C; следовательно, *больше четырех различных точек наша система содержать не может.*

Из доказанного следует, что условию задачи удовлетворяют лишь три точки, являющиеся вершинами *прямоугольного треугольника*, или четыре точки, являющиеся вершинами *прямоугольника.*

б) Оказывается, что и здесь *наибольшее возможное число точек, удовлетворяющих условию задачи, равно четырем*; однако расположены эти четыре точки в пространстве могут быть разными способами: тетраэдров (треугольных пирамид), все грани которых — прямоугольные треугольники, существует довольно много. Очевидно, например, что удовлетворяют условию задачи точки M_1, M_2, M_3 и M_4, где $\triangle M_1M_2M_3$ прямоугольный с гипотенузой M_2M_3, а $M_2M_4 \perp M_1M_2M_3$.

Пусть теперь $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — произвольные точки в пространстве, каждые три из которых являются вершинами прямоугольного треугольника; докажем, что $n \leqslant 4$. Если M_1M_2 — наиболь-

шее (или одно из наибольших) среди попарных расстояний между нашими точками, то все точки $M_3, \ldots, M_n$ принадлежат сфере Σ с диаметром M_1M_2 (ведь для любой третьей точки M_i угол $M_1M_iM_2$ прямой; ср. с решением задачи а)). Далее отбросим точки M_1 и M_2; тогда, если $n \geqslant 4$ и если M_3M_4 — наибольшее (или одно из наибольших) среди попарных расстояний между *оставшимися* точками, то точно так же все точки $M_5, \ldots, M_n$ принадлежат сфере σ с диаметром M_3M_4. Дальше мы рассмотрим два случая.

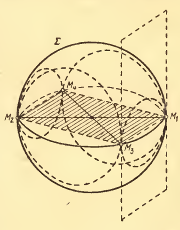


Рис. 80.

1°. Сферы Σ и σ совпадают, т. е. и M_1M_2 и M_3M_4 — *диаметры* сферы Σ (рис. 80). В этом случае $M_1M_2M_3M_4$ — вписанный в «большую окружность» S сферы Σ *прямоугольник*; плоскость $M_1M_3M_2M_4$ мы далее будем считать *горизонтальной*. Множество точек M сферы Σ таких, что $\triangle M_1M_3M$ прямоугольный, распадается на три подмножества, характеризуемые условиями $\angle MM_1M_3 = 90°$, $\angle MM_3M_1 = 90°$ и $\angle M_1MM_3 = 90°$; первая из них есть построенная на M_1M_4 как на диаметре «вертикальная окружность» — пересечение Σ с плоскостью $\pi \perp M_3M_1$; второе и третье — такие же окружности, построенные на отрезках M_2M_3 и M_1M_3 (см. тот же рис. 80). Легко видеть, что наше множество точек M и еще три аналогичных множества, отвечающие случаям, когда $\triangle M_3M_2M$ прямоугольный, $\triangle M_2M_4M$ прямоугольный и $\triangle M_4M_1M$ прямоугольный, не пересекаются в точках, отличных от M_1, M_2, M_3 и M_4 — значит, здесь $n \leqslant 4$, и наше множество точек сводится к $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

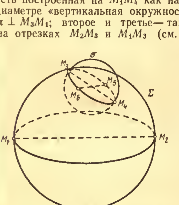


Рис. 81.

2°. Сферы Σ и σ различны. В таком случае все отличные от M_1 и M_2 наши точки, т. е. точки $M_3, \ldots, M_n$ принадлежат окружности s — линии пересечения сфер Σ и σ (рис. 81); отсюда число этих точек $\leqslant 4$ (ведь s — плоская линия; см. решение задачи а)), и значит, общее число рассматриваемых точек $\leqslant 6$. Однако и эта оценка возможного числа точек является завышенной; сейчас мы покажем, что помимо M_3 и M_4 на окружности s не может лежать ни одной точки.

Заметим прежде всего, что если P и Q — любые две из точек $M_3, \ldots, M_n$, то *ни один из углов PM_1Q и PM_2Q не может быть прямым.* В самом деле, с одной стороны, если бы имели место

равенства $\angle PM_1Q = \angle PM_2Q = 90°$, то по теореме Пифагора мы имели бы

$$M_1P^2 + M_2P^2 = M_1Q^2 + M_2Q^2 = M_1M_2^2;$$

$$M_1P^2 + M_1Q^2 = M_2P^2 + M_2Q^2 = PQ^2,$$

откуда с очевидностью вытекает, что $2M_1M_2^2 = 2PQ^2$, т. е. $M_1M_2 = PQ$, и мы пришли бы к случаю 1°, а не к случаю 2°. Пусть теперь в $\triangle PM_1Q$, скажем, $\angle M_1PQ = 90°$; докажем, что тогда и $\angle M_2QP = 90°$. Действительно, из равенства (рис. 81 а)

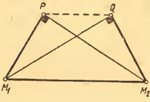


Рис. 81а.

$$M_1P^2 + M_2P^2 = M_1Q^2 + M_2Q^2 (= M_1M_2^2)$$

следует, что

$$M_1Q^2 - M_1P^2 = M_2P^2 - M_2Q^2;$$

поэтому, если $M_1Q^2 - M_1P^2 = PQ^2$ (и $\angle M_1PQ = 90°$), то так же $M_2P^2 - M_2Q^2 = PQ^2$ (и $\angle M_2QP = 90°$).

Предположим далее, что условию задачи удовлетворяют пять точек — M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, где M_3, M_4 и M_5 принадлежат изображенной на рис. 81 окружности s. Так как либо $\angle M_1M_3M_4 = 90°$, либо $\angle M_1M_4M_3 = 90°$, то точка M_1 принадлежит одной из двух (параллельных) плоскостей, проведенных через концы отрезка M_3M_4 и перпендикулярных этому отрезку. Точно так же M_1 принадлежит и аналогичной паре плоскостей, отвечающей отрезку M_3M_5, а также еще одной паре плоскостей, отвечающей отрезку M_4M_5, т. е. M_1 принадлежит пересечению трех указанных пар плоскостей, понимаемых как три *множества точек.* Эти три пары плоскостей *I*, *II* и *III* схематически изображены на рис. 82 (на нем дан «вид сверху» на эти три пары плоскостей, полученный в предположении, что плоскость $M_3M_4M_5$ *горизонтальна*). Отсюда следует, что M_1 принадлежит одной из двух (параллельных) прямых m_3 и m_4 (прямая m_3 проходит через точку M_3; прямая m_4 проходит через точку M_4), представляющих собой рассматриваемое пересечение пар плоскостей *I*, *II* и *III*.

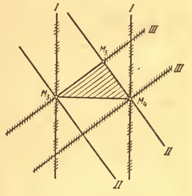


Рис. 82.

Но точно такие же рассуждения показывают, что также и M_2 принадлежит либо m_3, либо m_4. Отсюда следует, что точки M_1, M_2, M_3 и M_4 лежат в одной плоскости — в плоскости прямых m_3 и m_4, т. е. (в силу результата задачи а)) эти точки являются вершинами *прямоугольника* П. Но отрезок M_1M_2 — наибольший из соединяющих наши точки отрезков — должен являться диагональю П;

а тогда M_3M_4 — вторая диагональ П, и мы снова приходим к случаю 1°, где $M_3M_4 = M_1M_2$ и где общее число точек равно четырем (и точка M_5 вообще не существует).

34. Число n *может быть сколь угодно велико.* В самом деле, пусть, скажем, на плоскости[1]) выбрано n точек M_1, M_2, ..., M_n, удовлетворяющих условию задачи. Соединим между собой точки M_1 и M_2 и через M_1 и M_2 проведем прямые $m_1 \parallel m_2 \perp M_1M_2$; они ограничивают некоторую полосу, причем *все лежащие вне этой полосы точки M таковы, что $\triangle M_1M_2M$ тупоугольный.* Построим аналогичные полосы, отвечающие каждым двум из наших n точек; всего мы получим $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ полос (знание точного их числа нам даже не нужно). Все эти полосы не могут заполнить всю плоскость, ибо каждая прямая, не параллельная ни одной из наших полос, пересекает совокупность всех полос *по конечному числу отрезков*, и значит, содержит точки, не принадлежащие ни одной полосе. Присоединив такую точку M_{n+1} к нашим n точкам, мы получим $n+1$ точек, по-прежнему удовлетворяющих условию задачи; затем так же можно найти $n+2$ точки, — и этот процесс можно продолжать неограниченно.

35. Легко видеть, что провести четыре луча, попарно образующих тупые углы, можно: достаточно, например, соединить центр O *правильного тетраэдра $ABCD$* со всеми его вершинами (ясно, что, например $\angle AOB > \angle AO_1B = 90°$, где O_1 — центр грани BCD тетраэдра). Докажем теперь, что *нельзя указать больше четырех лучей в пространстве*, попарно образующих тупые углы.

Пусть l_1, l_2, l_3 и l_4 — четыре луча, выходящих из одной точки O и попарно образующих тупые углы, π_1, π_2, π_3 и π_4 — плоскости, проходящие через точку O и перпендикулярные соответственно к лучам l_1, l_2, l_3 и l_4. Все лучи, образующие тупые углы с лучом l_1, должны лежать по другую сторону плоскости π_1, чем луч l_1. Все лучи, образующие тупые углы с обоими лучами l_1 и l_2, должны лежать внутри двугранного угла, образованного полуплоскостями π_1 и π_2; этот двугранный угол (рис. 83, *а*) *острый*, так как угол между перпендикулярными к его граням лучами тупой. Все лучи, образующие тупые углы с каждым из трех лучей l_1, l_2, l_3, должны лежать внутри пересечения двугранных углов $\pi_1\pi_2$ и $\pi_1\pi_3$. Это пересечение — трехгранный угол $\pi_1\pi_2\pi_3$, или $OABC$ (рис. 83, *б*), у которого по доказанному выше все двугранные углы острые. Луч l_4 должен лежать внутри него; покажем, что он образует острые углы со всеми остальными лучами, лежащими внутри этого угла.

Пусть плоскость, проходящая через OA и луч l_4, пересекается с гранью BOC по лучу OA'. Один из двугранных углов с ребром OA' острый; пусть это будет угол $AOA'C$. Тогда *все двугранные углы трехгранного угла $OAA'C$* острые; отсюда следует, что *и все плоские углы* этого трехгранного угла тоже *острые* (см., например, решение задачи 28 книги Д. О. Шклярского и др., названной в списке на стр. 151). Но $\angle AOl_4$ составляет только часть угла AOA'; следовательно, угол между лучами OA и l_4 острый. Аналогично луч l_4 образует острые углы с OB и OC. Поэтому все

[1]) Продумайте, как видоизменяется это рассуждение, если речь идет о точках пространства (впрочем, условию задачи б) не противоречит случай, когда все точки лежат в одной плоскости).

три луча OA, OB, OC лежат по одну сторону с лучом l_4 от плоскости π_4, а значит, и все внутренние точки трехгранного угла $OABC$ лежат по ту же сторону от π_4, что и луч l_4. Следовательно, каждый луч l_5, расположенный внутри трехгранного угла $\pi_1\pi_2\pi_3$,

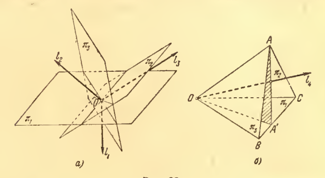


Рис. 83.

лежит по ту же сторону от плоскости π_4, и значит, никакой такой луч l_5 не может образовать тупой угол с l_4. Этим и доказывается требуемое утверждение.

36. а) Пусть OA, OB и OC — данные лучи. Так как

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA \leqslant 360^\circ,$$

где равенство имеет место, лишь если все лучи *лежат в одной плоскости* (сумма плоских углов трехгранного угла $\leqslant 360^\circ$), то *хоть один из этих углов* $\leqslant \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, причем ни один угол не меньше 120°, лишь *если все лучи лежат в одной плоскости и образуют между собой равные углы.*

Рис. 84.

б) «Лучшими» здесь будут лучи OA, OB, OC и OD, пересекающие сферу с центром O в вершинах *правильного тетраэдра* $ABCD$ (см. решение задачи 120 а) для случая $n = 4$; ср. со сказанным в конце решения задачи 120 а). Далее, высота DP правильного тетраэдра с ребром 1 равна $DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (AP — радиус описанной окружности правильного $\triangle ABC$); из подобия изображенных на рис. 84 (прямоугольных) $\triangle DPM$ и $\triangle DQO$ имеем

$$\frac{DP}{DM} = \frac{DQ}{DO},$$

т. е.

$$OD = \frac{DQ \cdot DM}{DP} = \frac{2}{3}(DM)^2 : DP = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

и из прямоугольного $\triangle ODN$ получаем

$$\sin\frac{\alpha}{2}=DN:OD=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ и } \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}.$$

в), г) Первое утверждение этих задач представляет собой непосредственное следствие результата задачи 35, а второе почти очевидно — три *взаимно перпендикулярные* прямые задают шесть лучей — таких, что никакие два из них (или из выбранных пяти из этих шести лучей) не образуют острого угла.

37. Если XYZ — треугольник, вписанный в данный многоугольник M (рис. 85, a), и PP_1 — сторона M, на которой лежит вершина X треугольника, то либо $\triangle PYZ$, $\triangle XYZ$ и $\triangle P_1YZ$ равновелики

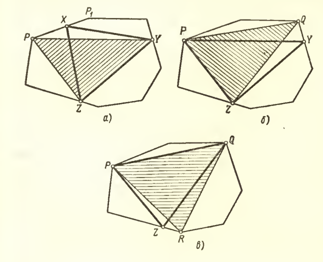


Рис. 85.

(когда $PP_1 \parallel YZ$), либо хотя бы один из треугольников PYZ и P_1YZ имеет бо́льшую площадь, чем XYZ (тот, вершина которого более удалена от прямой YZ, чем точка X). Таким образом, во всех случаях существует вписанный в M треугольник PYZ, вершина P которого совпадает с вершиной M, а площадь не меньше площади $\triangle XYZ$. Точно так же показывается, что можно найти вписанный в M треугольник PQZ, вершина Q которого тоже совпадает с вершиной M, а площадь не меньше площади PYZ (рис. 85, $б$) и, наконец, — вписанный в M треугольник PQR (черт. 85, $в$), все вершины которого совпадают с вершинами многоугольника, а площадь не меньше площади PQZ. Отсюда и следует утверждение задачи.

Примечание. Нетрудно видеть, что вписанных в M треугольников, имеющих одну и ту же площадь, бо́льшую площади всех других вписанных треугольников, может быть несколько (в случае *правильного шестиугольника* M их число равно 2) или даже бесконечно много (например, в случае *трапеции* M).

38. а) *Площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения длин сторон, заключающих этот угол* $\left(\text{ибо } S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\right)$; поэтому в обозначениях рис. 9 (стр. 37)

$$\frac{S_{APR}}{S_{ABC}}=\frac{AP\cdot AR}{AB\cdot AC};\quad \frac{S_{BPQ}}{S_{BAC}}=\frac{BP\cdot BQ}{BA\cdot BC},\quad \frac{S_{CQR}}{S_{CBA}}=\frac{CQ\cdot CR}{CB\cdot CA}.$$

Если бы все эти отношения были $>\frac{1}{4}$, то, перемножив их правые части, мы имели бы

$$\frac{AP\cdot AR\cdot BP\cdot BQ\cdot CQ\cdot CR}{AB^2\cdot BC^2\cdot CA^2}>\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64},$$

или

$$\frac{AP\cdot BP}{AB^2}\cdot\frac{BQ\cdot CQ}{BC^2}\cdot\frac{CR\cdot AR}{AC^2}>\frac{1}{64}.$$

Но поскольку $AP+BP=AB$, то в силу известной *теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом* двух величин $\left(ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right.$ при любых $a,\ b>0$, так как $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=$ $\left.=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqslant 0\right)$, имеем $AP\cdot BP\leqslant\left(\frac{AP+BP}{2}\right)^2=\frac{AB^2}{4}$, т. е. $\frac{AP\cdot BP}{AB^2}\leqslant\frac{1}{4}$ и аналогично

$$\frac{BQ\cdot CQ}{BC^2}\leqslant\frac{1}{4},\quad \frac{CR\cdot AR}{AC^2}\leqslant\frac{1}{4}.$$

Поэтому

$$\frac{AP\cdot BP}{AB^2}\cdot\frac{BQ\cdot CQ}{BC^2}\cdot\frac{CR\cdot AR}{AC^2}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}.$$

Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

б) Пусть A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 — средние линии $\triangle ABC$. Назовем соответствующими те стороны треугольников $A_1B_1C_1$ и PQR, концы которых расположены на сторонах одного и того же угла треугольника ABC. Тогда могут представиться два случая: либо найдется пара непересекающихся соответствующих сторон, например PQ и C_1A_1, т. е. PQ целиком лежит внутри *треугольника* C_1BA_1 (рис. 86, *а*) или внутри *трапеции* ACA_1C_1 (рис. 86, *б*), либо все соответствующие стороны попарно пересекаются (рис. 86, *в*). При этом, если PQ целиком лежит внутри трапеции ACA_1C_1 и, например, R лежит на отрезке AB_1, то PR лежит внутри *треугольника* AC_1B_1 (рис. 86, *б*); если R лежит на отрезке B_1C, то QR лежит внутри *треугольника* B_1A_1C. Поэтому остается рассмотреть только два случая: либо *найдется сторона вписанного треугольника, например PQ, лежащая внутри соответствующего треугольника C_1BA_1 (может быть — на его границе)*, либо *все соответствующие пары сторон треугольников PQR и $A_1B_1C_1$ пересекаются.*

Рассмотрим сначала первый случай (рис. 86, *а*) и докажем, что $S_{BPQ} \leqslant S_{PQR}$. Очевидно,

$$\frac{S_{BPQ}}{S_{PQR}} = \frac{\frac{1}{2} PQ \cdot BH}{\frac{1}{2} PQ \cdot RH_1} = \frac{BH}{RH_1},$$

где $BH \perp PQ$ и $RH_1 \perp PQ$; последнее отношение равно $\frac{BN}{NR} \leqslant \leqslant \frac{BN_1}{N_1R} = 1$, где N и N_1 — точки пересечения BR с PQ и с C_1A_1 (ибо A_1C_1 — средняя линия треугольника). Поэтому

$$\frac{S_{BPQ}}{S_{PQR}} \leqslant 1,$$

— что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь второй случай (рис. 86, *в*). Так как PQ пересекает C_1A_1, то либо $BP < BC_1 = \frac{1}{2} BA$, либо $BQ < BA_1 = \frac{1}{2} BC$;

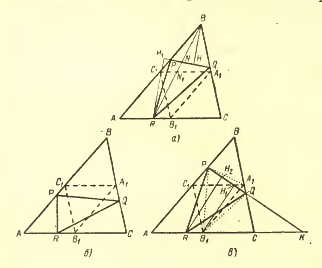


Рис. 86.

пусть для определенности $BP < \frac{1}{2} BA$. Прямая PQ пересекает продолжение AC в такой точке K, что C лежит между K и A. Из того, что $BP < \frac{1}{2} BA$, следует, что $AR < \frac{1}{2} AC$, ибо в противном случае QR и A_1B_1 не имели бы общих точек. Значит, на прямой KC

имеем следующий порядок точек: K, C, B_1, R, A. Отсюда вытекает, что

$$S_{QPR} > S_{QPB_1},$$

так как при общем основании PQ высота RH_2 треугольника PQR больше высоты B_1H_1 треугольника B_1PQ (ибо точка R дальше отстоит от вершины K угла PKA, чем B_1). Точно так же найдем, что

$$S_{QPB_1} > S_{A_1PB_1},$$
$$S_{A_1PB_1} = S_{A_1C_1B_1} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

Из сопоставления полученных результатов следует, что

$$S_{PQR} > \frac{1}{4} S_{ABC},$$

и значит,

$$S_{ARP} + S_{CQR} + S_{BPQ} < \frac{3}{4} S_{ABC}.$$

Из трех слагаемых в левой части хотя бы одно не больше $\frac{1}{4}$ ABC (ср. с задачей а)) и, следовательно, меньше S_{PQR}, что и требовалось доказать.

39. Поскольку площади двух треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (ср. начало решения задачи 38а)), то (см. рис. 10 на стр. 37, где положено $BC = AU = AV = a$, $CA = BW = BX = b$, $AB = CY = CZ = c$)

$$\frac{S_{AXY}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AUV}}{S_{ABC}} = \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{a^2}{bc} = \frac{a^2+b^2+c^2}{bc} + 2,$$

и

$$S_{AXY} + S_{AUV} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{bc} + 2\right) S.$$

Аналогично

$$S_{BUZ} + S_{BWX} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ac} + 2\right) S$$

и

$$S_{CVW} + S_{CYZ} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab} + 2\right) S.$$

А так как, очевидно,

$$S_{AXY} + S_{BZU} + S_{CVW} + S_{AUV} + S_{BWX} + S_{CYZ} = S_{UVWXYZ} + 2S_{ABC} = S_{UVWXYZ} + 2S,$$

то

$$S_{UVWXYZ} = \left[\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{bc} + 2\right) + \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ac} + 2\right) + \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab} + 2\right)\right] S - 2S = \left[(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) + 4\right] S.$$

Далее нам остается только воспользоваться тем, что

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant 2, \qquad \frac{b^2+c^2}{bc} \geqslant 2, \qquad \frac{a^2+c^2}{bc} \geqslant 2$$

$\left(\text{ибо, например, } \frac{a^2+b^2}{ab} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0\right)$ и [1])

$\frac{c^2}{ab} + \frac{b^2}{ac} + \frac{a^2}{bc} = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geqslant 3$, так как

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} - 3 = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{abc} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(a+b+c)[(a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)+(b^2+c^2-2bc)]}{abc} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]}{abc} \geqslant 0.$$

Поэтому

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+c^2}{bc}\right) + \left(\frac{c^2}{ab}+\frac{b^2}{ac}+\frac{a^2}{bc}\right) \geqslant 2+2+2+3=9,$$

и значит,

$$S_{UVWXYZ} = \left[(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)+4\right] S \geqslant 13S.$$

Очевидно, что если треугольник ABC *равносторонний* (т. е. $a=b=c$) — и только в этом случае — $S_{UVWXYZ} = 13S$.

40. Обозначим точки пересечения «главных» диагоналей AD, BE и CF шестиугольника $ABCDEF$ через P, Q и R (рис. 87). В таком случае

$$S_{AQB} + S_{BQC} + S_{CRD} + S_{DRE} + S_{EPF} + S_{FPA} \leqslant \leqslant S_{ABCDEF} - S_{PQR} \leqslant S;$$

поэтому площадь хоть одного из этих шести треугольников $\leqslant \frac{1}{6} S$ (где равенство возможно лишь в том случае, когда $\triangle PQR$ «стяги-

[1]) Так как $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ при всех $a,\ b,\ c \geqslant 0$, то

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

при всех $x,\ y,\ z \geqslant 0$ (для доказательства достаточно положить в исходном неравенстве $a^3 = x,\ b^3 = y,\ c^3 = z$) — в такой форме последнее неравенство (связывающее *среднее арифметическое* и *среднее геометрическое* трех чисел) используется в решении одной из нижеследующих задач.

вается» в точку). Пусть, например, $S_{DRE} \leqslant \frac{1}{6} S$; в таком случае, если $CF \parallel DE$, то $S_{DEC} = S_{DER} \leqslant \frac{1}{6} S$, а если $CF \nparallel DE$ и, скажем, точка C ближе к прямой DE, чем F, то $S_{CDE} < S_{DRE} \leqslant \frac{1}{6} S$.

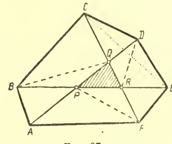


Рис. 87.

Улучшено неравенство задачи быть не может, так как площади всех треугольников, отсекаемых диагоналями AC, BD, ..., EA от *правильного* шестиугольника $ABCDEF$ площади S, равны $\frac{1}{6} S$.

41. Проведем через вершину A нашего шестиугольника прямую, параллельную $BC \parallel EF$, через вершину C — прямую, параллельную $AB \parallel DE$, и, наконец, через вершину E — прямую, параллельную $AF \parallel CD$, и обозначим точки пересечения проведенных прямых через P, Q и R (рис. 88). Очевидно, что, скажем, первая из проведенных нами прямых проходит внутри $\angle CAE$ — ведь в противном случае она бы пересекала либо BC, либо EF. Точно так же две оставшиеся прямые будут проходить внутри соответствующих им углов $\triangle ACE$; отсюда следует, что $\triangle ACE$ содержит $\triangle PQR$. Но так как у четырехугольников $ABCQ$, $CDEP$ и $AREF$ противоположные стороны параллельны, то эти четырехугольники — параллелограммы. Диагональ же параллелограмма делит его площадь пополам; отсюда видно, что площадь $\triangle ACE$ на величину площади $\triangle PQR$ больше всей оставшейся площади шестиугольника, т. е. составляет не менее половины всей площади последнего, что нам и требовалось доказать.

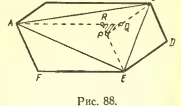


Рис. 88.

Равенство $S_{ACE} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$, очевидно, выполняется в том и только в том случае, когда точки P, Q и R совпадают, т. е. лишь для шестиугольников, противоположные стороны которых не только параллельны, но и *равны* между собой.

42. а) Ясно, что (см. рис. 11, *а* на стр. 38)

$$S - s = S_{eAa} + S_{aBb} + S_{bCc} + S_{cDd} + S_{dEe} =$$
$$= \frac{1}{4}(S_{EAB} + S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{DEA}) < \frac{1}{4}\, 2S \left(= \frac{1}{2} S\right),$$

ибо $S_{eAa} = \frac{1}{4} S_{EAB}$, так как ea — средняя линия $\triangle EAB$, и т. д., а $S_{EAB} + S_{ABC} + \ldots + S_{DEA} < 2S$, поскольку все треугольники

EAB, ABC, ..., DEA составляют часть пятиугольника Π и перекрываются *не более чем по два.* Отсюда сразу следует, что

$$s > \frac{1}{2} S,$$

причем это неравенство не может быть улучшено: ведь если «пятиугольник» Π вырождается в $\triangle ABC$ (т. е. вершины D и E «пятиугольника» Π совпадают с C; см. рис. 89, *а*), то n обращается в четырехугольник $abCe$ площади $\frac{1}{2} S$, а если D и E очень близки к C, то s можно сделать сколь угодно близким к $\frac{1}{2} S$.

Сложнее доказать неравенство $s < \frac{3}{4} S$. Для этого прежде всего заметим, что если Π вырождается в $\triangle ABD$ в силу того, что вершины E и C сливаются соответственно с A и с B (рис. 89, *б*), то n

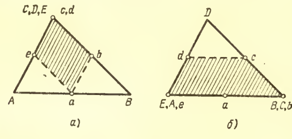


Рис. 89.

обращается в трапецию $ABcd$ площади $\frac{3}{4} S$, а если E и C очень близки к A и к B, то площадь n может быть сделана сколь угодно близкой к $\frac{3}{4} S$.

Далее предположим, что пятиугольник Π деформируется так, что его вершина A движется по проходящей через ее начальное положение прямой $l \parallel BE$ (рис. 90, *а*); при этом площадь S пятиугольника Π, очевидно, не меняется, причем Π остается выпуклым, пока A перемещается в пределах отрезка $A'A''$, где A' и A'' — точки пересечения l с продолжениями сторон CB и DE пятиугольника. Если теперь обозначить расстояния от точек b и d до прямой $ae \parallel l$ через h_1 и h_2, то при сдвиге точки A по прямой l на расстояние $AA_1 = p$ (где p еще уместно считать положительным или отрицательным в зависимости от направления отрезка AA_1 на прямой l, которую, таким образом, мы будем считать *направленной*) s изменится на величину

$$\frac{1}{4} h_1 p - \frac{1}{4} h_2 p = \frac{1}{4} (h_1 - h_2) p,$$

откуда следует, что из всех рассматриваемых пятиугольников Π наибольшее и наименьшее значения s достигаются для (вырожденных) «пятиугольников» $\Pi' = A'BCDE$ и $\Pi'' = A''BCDE$ [1]).

Пусть $\Pi' = A'BCDE$ — тот «пятиугольник» Π, для которого $s' \geqslant s$, где s и s' — площади пятиугольников n и n', отвечающих Π и Π'; E — та из вершин D и E «пятиугольника» Π', которая больше

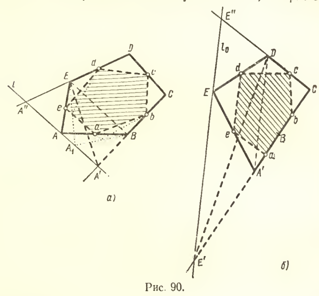


Рис. 90.

(или, по крайней мере, не меньше) удалена от прямой $A'BC$, чем вторая вершина. Будем теперь снова деформировать Π', двигая его вершину E по прямой $l_0 \parallel A'D$ (рис. 90, б). В точности как выше устанавливается, что при такой деформации (вырожденного) «пятиугольника» Π' (оставляющей его выпуклым) площадь S' $(=S)$ пятиугольника Π' не меняется, а площадь s' отвечающего Π' пятиугольника n' достигает максимума для «пятиугольника» $\Pi_0'' = A'BCDE'$, где E' — точка пересечения l_0 и $A'BC$. Наконец, сдвигая A' и B вдоль $E'C$ соответственно в положения E' и C; при этом мы придем к «пятиугольнику» $\Pi_0 \equiv E'CCDE'$ той же площади S_0, что и пятиугольник Π, а площадь отвечающего Π_0 «пятиугольника» n_0 возрастет. Но ясно, что для такого «пятиугольника» Π фигура n обращается в изображенный на рис. 89, б четырехугольник (трапецию) $n_0 \equiv abcde$ площади s_0, где

$$s \leqslant s' \leqslant s_0 = \frac{3}{4} S_0 = \frac{3}{4} S,$$

что и доказывает утверждение задачи.

[1]) Это утверждение можно считать справедливым и для случая $db \parallel ea \parallel l$, когда все рассматриваемые пятиугольники имеют одинаковые площади.

б) Ясно, что равенство $s = 0$ осуществляется, например, для шестиугольника $Ш$, «главные» диагонали AD, BE и CF которого пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам; равенство $s = \frac{1}{4} S$ осуществляется для (вырожденного) «шестиугольника» $Ш \equiv \triangle ACE$, вершины B, D и F которого совпадают соответственно с A, с C и с E (рис. 91). Отсюда уже следует, что оценка настоящей задачи (если только нам удастся ее доказать) никак не может быть улучшена.

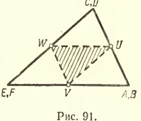


Рис. 91.

Поступим теперь аналогично решению задачи а), т. е. будем деформировать $Ш$, двигая вершину A шестиугольника по прямой $l \parallel BF$ (рис. 92, а); величина S при этом не изменится. Ясно, что вершины V и W треугольника τ будут при этом оставаться на месте, а вершина U будет двигаться по прямой $\parallel l$, точнее — по отрезку $U'U''$ этой прямой, отвечающему «области выпуклости» $A'A''$ шестиугольника $Ш$ (где A' и A'' — точки пересечения l с CB и EF). Наибольшему и наименьшему значениям $s = S_{UVW}$ будут отвечать концы U' и U'' отрезка $U'U''$[1]); пусть, например, $s' \geqslant s$, где s' — площадь $\tau' \equiv \triangle U'VW$, отвечающего (вырожденному!) шестиугольнику $Ш' = A'BCDEF$.

Далее будем деформировать $Ш'$, двигая E по прямой $l_1 \parallel DF$ (рис. 92, б); если E пробегает отрезок $E'E''$, где E' и E'' — точки пересечения l_1 с $A'F$ и с CD, то V пробегает некоторый отрезок $V'V''$, а U' и W не меняются; из всех треугольников $U'VW$ наибольшую площадь s'' будет иметь либо $\triangle U'V'W$, либо $\triangle U'V''W$ — скажем, $\triangle U'V'W$. Затем, действуя аналогично (рис. 91, в, где $D'D'' \parallel E'C$ и $s''' = S_{U''V'W} \geqslant S_{U'V'W}$), заменим $Ш'' \equiv A'BCDE'F$ «шестиугольником» $Ш''' \equiv A'BCD'E'F$ той же площади, изображенным на рис. 92, г; наконец $Ш'''$ заменим «шестиугольником» $Ш^{IV} \equiv A'A'CD'E'F$, где мы считаем, что B совпадает с A' (рис. 92, д). Обозначая отвечающий $Ш^{IV}$ треугольник $U''V''W$ (рис. 92, д) через τ^{IV}, его площадь — через s^{IV}, середину стороны $E'D$ «шестиугольника» $Ш^{IV}$ — через Q, а точку пересечения $E'D'$, скажем с $V''W$, — через R, очевидно, получим

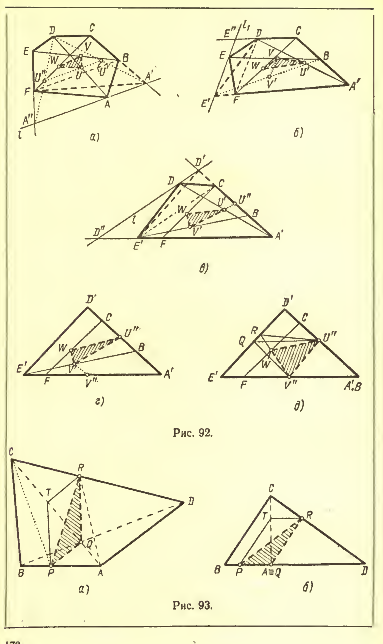
$$s \leqslant s' \leqslant s'' \leqslant s''' \leqslant s^{IV} = S_{U''WV''} \leqslant S_{U''RV''} = S_{U''QV''} = \frac{1}{4} S,$$

что и доказывает утверждение задачи.

43. Ясно, что $s = 0$, если $AD \parallel BC$; далее мы будем считать, что $AD \nparallel BC$. Дополним $\triangle PQR$ до параллелограмма $PQRT$ (рис. 93, а). Докажем, что *вершина T параллелограмма $PQRT$ принадлежит диагонали AC четырехугольника $ABCD$.* В самом деле, если T_1 и T_2 — точки пересечения прямых $PT_1 \parallel BC$ и $RT_2 \parallel DA$

---

[1]) Если отрезок $U'U''$ пересекает прямую VW, то наименьшее значение $s = 0$ достигается для точки пересечения $U'U''$ с прямой VW, а наибольшее значение — для одного из концов отрезка $U'U''$.



D
C
E
V
W
B
U''
U
U'
A'
F
A
A''
l
a)
E''
l1
D
C
E
V
B
W
U'
V'
A'
E'
F
б)
D'
D
C
U''
U'
W
B
l
D''
V'
E'
F
A'
в)
D'
C
U''
W
B
E'
F
V''
A'
г)
D'
C
R
Q
U''
W
E'
F
V''
A',B
д)
C
R
T
D
Q
B
P
A
a)
C
T
R
B
P
A≡Q
D
б)

Рис. 92.

Рис. 93.

с диагональю AC, то очевидно,

$$\frac{AT_1}{AC}=\frac{AP}{AB}=\frac{DQ}{DB} \quad \text{и} \quad \frac{AT_2}{AC}=\frac{DR}{DC}=\frac{DQ}{DB},$$

откуда и следует, что $T_1 = T_2 = T$.

Далее, в силу $PQ \#\, TR$ треугольники APC и ARC имеют одинаковые высоты, опущенные на их общую сторону AC, а следовательно, и одинаковые площади σ. Затем имеем (заметьте, что $S_{PQT} = S_{RQT} = s$)

$$\sigma = S_{APC} = \frac{AC}{QT} S_{QPT} = \frac{AC}{QT} s;$$

с другой стороны,

$$S_{ABC} = \frac{AB}{AP}\sigma = \frac{AC}{AT}\sigma \quad \text{и} \quad S_{ADC} = \frac{AC}{TC}\sigma,$$

так что

$$S = S_{ABC} + S_{DAC} = \left(\frac{AC}{AT} + \frac{AC}{TC}\right)\sigma = \frac{AC^2}{AT \cdot TC}\sigma = \frac{AC^3}{AT \cdot TC \cdot QT} s.$$

Итак,

$$\frac{s}{S} = \frac{AT \cdot TC \cdot QT}{AC^3} < \frac{AT^2 \cdot TC}{AC^3} = \left(\frac{AT}{AC}\right)^2 \cdot \frac{TC}{AC},$$

ибо в разбираемом случае (изображенном на рис. 93, *а*) $QT < AT$. Воспользуемся теперь неравенством

$$XYZ \leqslant \left(\frac{X+Y+Z}{3}\right)^3, \qquad (*)$$

где X, Y и Z — произвольные положительные числа (ср. решение задачи 39, в частности сноску на стр. 165). Положив в $(*)$ $X = Y = \frac{AT}{AC}$ и $Z = \frac{2TC}{AC}$, получим

$$\frac{2s}{S} < \left(\frac{AT}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{2TC}{AC}\right) \leqslant \left(\frac{\frac{AT}{AC} + \frac{AT}{AC} + \frac{2TC}{AC}}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{2AT+2TC}{AC}}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

т. е.

$$\frac{s}{S} \leqslant \frac{4}{27},$$

что нам и требовалось доказать.

Из решения задачи вытекает, что равенство $\frac{s}{S} = \frac{4}{27}$ означает, что $QT = AT$, т. е. что $Q \equiv A$ и значит, точки D, A, B принадлежат одной прямой, и что $\frac{AT}{AC} = \frac{2TC}{AC}$, т. е. $\frac{AT}{AC} = \frac{2}{3}$ (см., например, рис. 93, *б*, где $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3}$, и потому $\frac{AT}{AC} = \frac{DR}{DC} = \frac{DA}{DB} =$

$=\frac{2}{3}$; заметнм еще, что в то время как на рис. 93, *а* точка T строится как четвертая вершнна параллелограмма с вершинами R, Q и P на рис. 93, *б* эта точка определяется равенством $\frac{AT}{AC}=\frac{2}{3}$, и затем по ней восстанавливается точка P). Если же невырожденный четырехугольник $ABCD$ достаточно близок к изображенному на рнс. 93, *б* (вырожденному) «четырехугольнику» (и точка пересечення стороны AB четырехугольника с прямой $QP \parallel DA$ близка к точке P рнс. 93, *б*), то отношение $\frac{s}{S}$ может быть сделано сколь угодно близким к $\frac{4}{27}$, откуда следует, что улучшить оценку $s<\frac{4}{27}S$ нельзя.

44. В решении этой задачи несколько раз используется алгебраическое неравенство Коши[1])

$$(AX+BY)^2 \leqslant (A^2+B^2)(X^2+Y^2) \qquad (*)$$

(где A, B, X, Y — положительные числа), справедливость которого вытекает из того, что

$$(A^2+B^2)(X^2+Y^2)-(AX+BY)^2=$$
$$=A^2Y^2+B^2X^2-2ABXY=(AY-BX)^2 \geqslant 0;$$

из этого доказательства неравенства (*) следует, что равенство в нем достигается лишь при $AY=BX$, или при $A:B=X:Y$.

Заметнм теперь, что если, скажем, a — нанбольший из отрезков a, b, c, то

$$a^2=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2\right)<\frac{1}{2}\left[(b_1+c_1)^2+(b_2+c_2)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(b_1^2+b_2^2\right)+\left(c_1^2+c_2^2\right)\right]+(b_1c_1+b_2c_2)\leqslant$$
$$\leqslant b^2+c^2+\sqrt{\left(b_1^2+b_2^2\right)\left(c_1^2+c_2^2\right)}=b^2+c^2+(\sqrt{2}\,b)(\sqrt{2}\,c)=(b+c)^2$$

(здесь использовано неравенство (*), в котором положено $A=b_1$, $B=b_2$, $X=c_1$, $Y=c_2$), и значит, $a<b+c$, т. е. треугольник T со сторонами a, b и c существует.

Далее, пусть h_1, h_2 и h — высоты треугольников T_1, T_2 и T, опущенные, скажем, на стороны длин a_1, a_2 и a; в таком случае, очевидно,

$$S_1=\frac{1}{2}a_1h_1, \qquad S_2=\frac{1}{2}a_2h_2 \qquad \text{и} \qquad S=\frac{1}{2}ah.$$

[1]) Ср. задачи 289 и след. книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, названной в подстрочном примечании на стр. 39.

С другой стороны, применение теоремы косинусов к треугольникам $T \equiv ABC$, $T_1 \equiv A_1B_1C_1$ и $T_2 \equiv A_2B_2C_2$ дает

$$ac\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2} = \frac{\left(a_1^2+a_2^2\right)+\left(c_1^2+c_2^2\right)-\left(b_1^2+b_2^2\right)}{4} =$$

$$= \frac{a_1^2+c_1^2-b_1^2}{4} + \frac{a_2^2+c_2^2-b_2^2}{4} = \frac{1}{2}\ (a_1c_1\cos B_1 + a_2c_2\cos B_2).$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получаем

$$a^2c^2\cos^2 B = \frac{1}{4}\ (a_1c_1\cos B_1 + a_2c_2\cos B_2)^2,$$

откуда, снова используя (*) (где теперь надо положить $A = a_1$, $B = a_2$, $X = c_1\cos B_1$ и $Y = c_2\cos B_2$), имеем

$$a^2c^2\cos^2 B \leqslant \frac{1}{4}\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(c_1^2\cos^2 B_1 + c_2^2\cos^2 B_2\right),$$

или, поскольку $a_1^2 + a_2^2 = 2a^2$,

$$c^2\cos^2 B \leqslant \frac{1}{2}\left(c_1^2\cos^2 B_1 + c_2^2\cos^2 B_2\right),$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда

$$a_1 : a_2 = c_1\cos B_1 : c_2\cos B_2.$$

С другой стороны, $c^2 = \frac{1}{2}\left(c_1^2 + c_2^2\right)$; вычитая почленно из этого равенства последнее неравенство (и используя то, что $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ при всех α), получаем

$$c^2\sin^2 B \geqslant \frac{1}{2}\left(c_1^2\sin^2 B_1 + c_2^2\sin^2 B_2\right).$$

Но, очевидно (сделайте чертеж!), $c\sin B = h$, $c_1\sin B_1 = h_1$ и $c_2\sin B_2 = h_2$; таким образом, имеем

$$h^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right),$$

где условия равенства — те же самые, что и выше.

Теперь мы можем перейти к решению задач б) и а) (в этом именно порядке!).

б) Очевидно (здесь мы снова используем неравенство (*), а также то, что $a_1^2 + a_2^2 = 2a^2$, $h_1^2 + h_2^2 \leqslant 2h^2$),

$$\left[\frac{1}{2}(S_1+S_2)\right]^2 = \left[\frac{1}{4}\left(a_1h_1 + a_2h_2\right)\right]^2 \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^2\left[\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(h_1^2+h_2^2\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^2 2a^2\cdot 2h^2 = \frac{1}{4}\,(ah)^2 = S^2,$$

и значит,

$$\frac{1}{2}(S_1+S_2)\leqslant S,$$

где равенство имеет место, лишь если

$$a_1:a_2=c_1\cos B_1:c_2\cos B_2$$

и

$$a_1:a_2=h_1:h_2=c_1\sin B_1:c_2\sin B_2,$$

т. е. если $\cos B_1:\cos B_2=\sin B_1:\sin B_2$, т. е. $\operatorname{tg} B_1=\operatorname{tg} B_2$, и $B_1=B_2$, после чего наши условия принимают вид

$$a_1:a_2=c_1:c_2,$$

что (совместно с равенством $B_1=B_2$) означает *подобие* треугольников T_1 и T_2.

а) Так как

$$\left[\frac{1}{2}(S_1+S_2)\right]^2=S_1S_2+\left[\frac{1}{2}(S_1-S_2)\right]^2\geqslant S_1S_2,$$

то из результата задачи б) следует

$$S\geqslant\frac{1}{2}(S_1+S_2)\geqslant\sqrt{S_1S_2};$$

при этом, так как $S=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$, лишь если треугольники T_1 и T_2 подобны, и $\frac{1}{2}(S_1+S_2)=\sqrt{S_1S_2}$, лишь если $S_1-S_2=0$, т. е. если треугольники T_1 и T_2 равновелики, то равенство в задаче а) имеет место, лишь если треугольники T_1 и T_2 подобны и равновелики, т. е. если они *равны*.

45. в) Пусть $ABCD$ — рассматриваемый четырехугольник, O — точка пересечения его диагоналей и α — угол между диагоналями $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=e$, $BD=f$ (см. рис. 94, *а*, где четырехугольник $ABCD$ — выпуклый). Заметим прежде всего, что

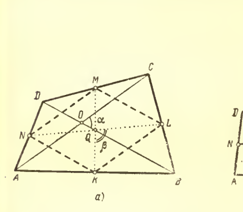
$$S=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCD}+S_{ODA}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\alpha+$$
$$+\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\alpha+\frac{1}{2}OC\cdot OD\sin\alpha+\frac{1}{2}OD\cdot OA\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}[OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA]\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}(OA+OC)(OB+OD)\sin\alpha=\frac{1}{2}ef\sin\alpha,\qquad(*)$$

откуда непосредственно вытекает утверждение задачи а):

$$S=\frac{1}{2}ef\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}ef=\frac{1}{4}[(e^2+f^2)-(e-f)^2]\leqslant\frac{1}{4}(e^2+f^2);\qquad(**)$$

при этом равенство $S=\frac{1}{4}(e^2+f^2)$, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда $\alpha=90°$ и $e-f=0$, т. е. для четырехугольников, *диагонали которых равны и взаимно перпендикулярны.*

б) Четырехугольник, вершинами которого служат середины K, L, M и N последовательных сторон исходного четырехугольника, является, очевидно, параллелограммом, стороны которого равны



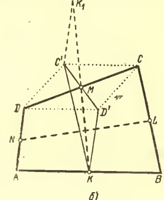


Рис. 94.

половинам диагоналей исходного четырехугольника и параллельны этим диагоналям: в самом деле, так как KL и NM — средние линии $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ (рис. 94, *а*), то $KL \parallel NM \parallel AC$ и $KL=NM=\frac{1}{2}AC$; точно так же $KN \# LM=\frac{1}{2}BD$. Поэтому, если обозначить площадь параллелограмма $KLMN$ через s, то [1])

$$s=KL\cdot LM\sin\angle KLM=\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{1}{2}f\right)\sin\alpha=\frac{1}{4}ef\sin\alpha=\frac{1}{2}S.$$

С другой стороны, применяя неравенство (**) решения задачи а) к параллелограмму $KLMN$ с диагоналями $KM=m$ и $LN=n$,

[1]) Это следует также из того, что

$$S_{AKN}+S_{CML}=\frac{1}{4}S_{ABD}+\frac{1}{4}S_{CBD}=\frac{1}{4}S \text{ и } S_{BKL}+S_{DNM}=\frac{1}{4}S,$$

откуда

$$s=S-(S_{AKN}+S_{BKL}+S_{CLM}+S_{DMN})=$$
$$=S-\left(\frac{1}{4}S+\frac{1}{4}S\right)=\frac{1}{2}S.$$

получаем

$$s = \frac{1}{2} S \leqslant \frac{1}{4} (m^2 + n^2),$$

откуда следует, что

$$S \leqslant \frac{1}{2} (m^2 + n^2). \qquad (***)$$

При этом равенство здесь имеет место лишь в том случае, когда $m = n$ и $KM \perp LN$, т. е. когда параллелограмм $KLMN$ — *квадрат* (что в свою очередь снова приводит нас к требованию *равенства и перпендикулярности диагоналей* исходного четырехугольника $ABCD$).

в) Применим теперь к параллелограмму $KLMN$ решения задачи б) равенство (*) решения задачи а):

$$\frac{1}{2} S = s = \frac{1}{2} KM \cdot LN \sin \angle KQL = \frac{1}{2} mn \sin \beta,$$

где β — угол между средними линиями KM и LN четырехугольника $ABCD$; отсюда следует, что

$$S = mn \sin \beta \leqslant mn,$$

где равенство имеет место лишь в случае $\beta = 90°$, т. е. для четырехугольника $ABCD$, для которого параллелограмм $KLMN$ является ромбом — для четырехугольника с *равными диагоналями*.

Заметим теперь, что

$$m = KM \leqslant \frac{1}{2} (BC + AD) = \frac{1}{2} (b + d)$$

и

$$n = LN \leqslant \frac{1}{2} (AB + CD) = \frac{1}{2} (a + c),$$

причем первое неравенство обращается в равенство, лишь если $BC \parallel AD$; аналогично $n = \frac{1}{2} (a + c)$ лишь при $AB \parallel CD$. Для того чтобы доказать, скажем, неравенство $m \leqslant \frac{1}{2} (b + d)$, достаточно отложить от точки K отрезки $KC' \# BC$ и $KD' \# AD$ (рис. 94, *б*). Так как при этом четырехугольники $KBCC'$ и $AKD'D$ суть параллелограммы, то $CC' \# BK$ и $DD' \# AK$; поэтому $CC' \# DD'$, и значит, $CC'DD'$ — параллелограмм. Середина M стороны CD является, очевидно, точкой пересечения диагоналей этого параллелограмма, т. е. M является и *серединой отрезка* $C'D'$.

Теперь, откладывая на продолжении KM за точку M отрезок $MK_1 = KM$ и соединяя K_1 с C', получим, что $\triangle K_1MC' = \triangle KMD'$ (ибо $K_1M = KM$, $MC' = MD'$ и $\angle K_1MC' = \angle KMD'$); поэтому $K_1C' = KD'$ и, значит,

$$2m = 2KM = KK_1 \leqslant KC' + C'K_1 = KC' + KD' = BC + AD = b + d.$$

Ясно также, что $2m = 2KM = BC + AD = b + d$, лишь если $KC'K_1$ — прямая линия, т. е. если $BC \parallel AD$. Аналогично устанавливается и неравенство $2n \leqslant a + b$, обращающееся в равенство лишь при $AB \parallel DC$.

Окончательно получаем

$$S \leqslant mn \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d),$$

что и требовалось доказать. Равенство здесь имеет место, лишь если $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$ и $AC = BD$, т. е. если четырехугольник $ABCD$ — *прямоугольник*.

46. а) Поскольку проекции многоугольника M на оси x и y равны 4 и 5, то M целиком заключается внутри прямоугольника $ABCD \equiv P$ размером $4 \times 5 = 20$, стороны которого параллельны координатным углам. Те же соображения убеждают нас, что многоугольник M заключается внутри прямоугольника $abcd \equiv p$ размером $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$, стороны которого параллельны биссектрисам l_1 и l_2 координатных углов. Поэтому M принадлежит пересечению $Q = P \cap p$ ($\cap$ — теоретико-множественный знак *пересечения*), и нам остается лишь выяснить, при каком расположении P и p площадь восьмиугольника Q (может быть, вырожденного, т. е. имеющего менее восьми сторон) будет *наибольшей*.

Нетрудно понять, что ширина прямоугольника P в направлении прямой l_1 равна $4{,}5\sqrt{2}$: в самом деле, если AC_1 — проекция диагонали AC прямоугольника P на прямую l_1 и E — точка пересечения стороны $AB = 5$ прямоугольника с прямой $C_1E \perp AC_1$ (рис. 95), то $AE = AB + BE = AB + BC = 5 + 4 = 9$, откуда следует, что $AC_1 = \frac{AE}{\sqrt{2}} = 4{,}5\sqrt{2}$. Таким образом, перпендикулярные l_1 стороны прямоугольника p отсекают от P два равнобедренных прямоугольных треугольника AUV и CYZ, сумма высот h_A и h_C которых, опущенных на гипотенузы UV и YZ, равна $4{,}5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 1{,}5\sqrt{2}$. Сумма площадей этих треугольников, очевидно, равна

$$h_A^2 + h_C^2 = \frac{1}{2}\left[(h_A + h_C)^2 + (h_A - h_C)^2\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[(1{,}5\sqrt{2})^2 + (h_A - h_C)^2\right] = 2{,}25 + \frac{(h_A - h_C)^2}{2}$$

(почему?); она будет минимальна, если $h_A = h_C$ — и в этом случае

$$S_{AUV} + S_{CYZ} = 2{,}25.$$

Аналогично этому и ширина прямоугольника P в направлении прямой l_2 также равна $4{,}5\sqrt{2}$ (проекция BD_1 диагонали BD прямоугольника P на прямую $BD_1 \parallel l_2$ равна $\frac{4+5}{\sqrt{2}} = 4{,}5\sqrt{2}$); поэтому параллельные l_1 стороны p отсекают от P (равнобедренные прямоугольные) $\triangle BXW$ и $\triangle DRT$, сумма высот h_B и h_D которых, опущенных на гипотенузы XW и RT, равна $4{,}5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0{,}5\sqrt{2}$. Сумма площадей этих треугольников, равная

$$h_B^2 + h_D^2 = \frac{1}{2}\left[(h_B + h_D)^2 + (h_B - h_D)^2\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[(0{,}5\sqrt{2})^2 + (h_B - h_D)^2\right] = 0{,}25 + \frac{(h_B - h_D)^2}{2},$$

достигает минимума 0,25, если $h_B = h_D$.

Окончательно мы заключаем, что *площадь Q не больше чем*

$$20 - 2{,}25 - 0{,}25 = 17{,}5,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство:

$$S \leqslant 17{,}5.$$

Нетрудно видеть, что многоугольник M может быть таким, что $S = 17{,}5$ (изобразите его!).

Примечание. То, что площадь восьмиугольника Q будет наибольшей в том случае, когда $h_A = h_C$ и $h_B = h_D$, где h_A, h_B, h_C и h_D — высоты треугольников AUV, BXW, CYZ и DRT (рис. 95), можно установить и без всяких расчетов. В самом деле,

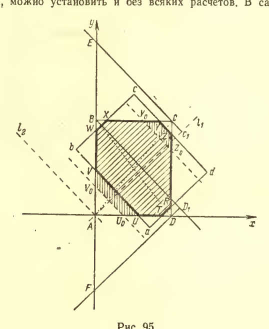


Рис. 95.

если прямые U_0V_0 и Y_0Z_0 (стороны прямоугольника p_0) *симметричны относительно центра O прямоугольника P* (на рис. 95 эти прямые изображены пунктиром) и высоты треугольников AU_0V_0 и CY_0Z_0 равны, а прямые UV и YZ (стороны прямоугольника p в другом, произвольном положении) не симметричны относительно O, то объединение треугольников AU_0V_0 и CY_0Z_0, отрезаемых прямыми U_0V_0 и Y_0Z_0 от p, отличается от объединения аналогично получаемых треугольников AUV и CYZ двумя «полосками» (равнобочными трапециями) U_0V_0VU и Y_0Z_0ZY одной и той же «ширины» (одной высоты). При этом легко видеть, что на рис. 95 $S_{U_0V_0VU} > S_{Y_0Z_0ZY}$, в силу чего $S_{AU_0V_0} + S_{CY_0Z_0} < S_{AUV} + S_{CYZ}$.

Аналогично устанавливается и неравенство

$$S_{BX_0W_0} + S_{DR_0T_0} \leqslant S_{BXW} + S_{DRT},$$

где высоты треугольников BX_0W_0 и DR_0T_0 равны.

б) Аналогично решению задачи а) устанавливается, что искомый многоугольник M заключается внутри пересечения $Q = P \cap p$; при этом, поскольку M проектируется в четырех направлениях отрезками заданной в условии длины, то он имеет точки на всех восьми сторонах восьмиугольника $Q \equiv RTUVWXYZ$. Обозначим эти восемь точек последовательно через r, t, u, v, w, x, y и z (рис. 96; не исключено, что некоторые из названных точек совпадут с вершинами Q или между собой); так как многоугольник M выпуклый, то он обязательно будет содержать внутри выпуклый восьмиугольник $q \equiv rtuvwxyz$ (который также может фактически иметь < восьми сторон!), возможно, совпадая с ним. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы установить, когда будет *наименьшей* площадь q.

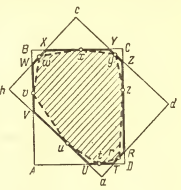


Рис. 96.

Заметим прежде всего, что если вершины t и z восьмиугольника q закреплены, то, стремясь уменьшить площадь $\triangle zrt$, мы всегда можем сдвинуть r в одну из вершин R или T восьмиугольника Q. В самом деле, если z не совпадает с R и t не совпадает с T, то в случае, когда $zt \nparallel RT$, площадь $\triangle zrt$ будет меньше всего при совпадении r с тем из концов отрезка RT, который ближе к прямой zt; если же $zt \parallel RT$, то площадь $\triangle zrt$ вовсе не зависит от положения точки r на RT, и мы снова можем считать эту точку совпадающей с R или с T. Аналогично, если z совпадает с R или t совпадает с T, то (равный нулю) минимум площади $\triangle zrt$ достигается, когда r совпадает с той же точкой; если же и r совпадает с R и t с T, то нам безразлично, где расположить (фиктивную!) «вершину» r восьмиугольника q, и мы можем свободно считать ее совпадающей с R или с T. Разумеется, это рассуждение сохраняет силу и в применении к любой другой вершине восьмиугольника q, так что можно смело считать, что *все вершины q совпадают с какими-то вершинами Q*.

Но этим наши заключения о виде восьмиугольника q наименьшей возможной площади не ограничиваются. Предположим, например, что *вершина r* этого многоугольника *совпадает с вершиной R* многоугольника Q (рис. 97). Ясно при этом, что если y совпадает с Y, то площадь $\triangle yzr$ будет меньше всего (а именно будет $= 0$), если также и *вершина z* восьмиугольника q *совпадет* с той же *точкой R*; если же $y \equiv Z$, то мы также можем считать, что (фиктивная) вершина z совпадает с R. Далее ясно, что если y совпадает с Y, то по тем же соображениям и x совпадет с Y; точно так же, если x совпадает с Y, то и y совпадет с Y; поэтому либо обе точки

x и y совпадают с Y (рис. 97, *а, б*), либо y совпадает с Z, а x — с X, причем в последнем случае точка w тоже должна совпасть с X (рис. 97, *в*). Точно так же устанавливается, что либо точки t и u обе совпадают с U, либо t совпадает с T и тогда точки u и v обе должны совпасть с V. Таким образом, если точки r и z совпадают с R, точки x и y — с Y, а точки t и u — с U, то либо две оставшиеся вершины v и w восьмиугольника q обе совпадают с W (рис. 97, *а*),

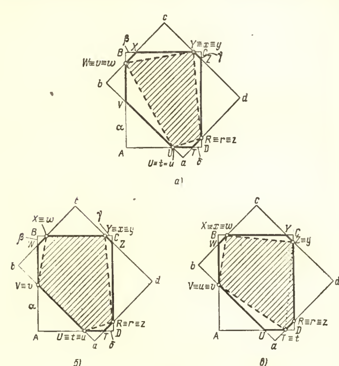


Рис. 97.

либо v совпадает с V, а w — с X (рис. 97, *б*). Если точки r и z совпадают с R, точки x и y — с Y, точка t — с T и точки u и v — с V, то в случае, когда точка w совпадает с W, мы приходим к пятиугольнику $RTVWY$ во всем подобному пятиугольнику рис. 97, *б*; если же точка w совпадает с X, то «восьмиугольник» q обращается в пятиугольник $RTVXY$ того же типа, что и два предшествующие. Наконец, случай, когда точки r и z совпадают с R, точка y — с Z, точки x и w — с X, точка t — с T, а точки u и v — с V (рис. 97, *в*), является невозможным, ибо при этом мы можем еще уменьшить площадь (вырожденного) «восьмиугольника» $q \equiv RTVXZ$, совместив z с Z и r — с T. Поэтому интересующий нас *восьмиугольник q обязательно будет вырожденным*, а именно, он *будет представлять*

собой либо четырехугольник типа $RUWY$ (рис. 97, *а*) *или $TVXZ$, либо пятиугольник типа $RUVXY$* (рис. 97, *б*).

Рассмотрим эти два случая последовательно. Более простым из них является тот случай, когда «восьмиугольник» q наименьшей площади обращается в четырехугольник $RUWY$ или $TVXZ$. Дело в том, что *площади четырехугольников $RUWY$ и $TVXZ$ вовсе не зависят от взаимного расположения прямоугольников p и P.* В самом деле, пусть $AB = a$ $(=5)$ и $AD = b$ $(=4)$ — стороны прямоугольника P; отрезки сторон этого прямоугольника, отсекаемые сторонами прямоугольника p, обозначим через α, β, γ и δ, как это указано на рис. 97, *а*. В таком случае

$$S_{RUWY} = S_{ABCD} - S_{AUW} - S_{BWY} - S_{CYR} - S_{DRU} =$$

$$= ab - \frac{1}{2}[(a-\beta)\alpha + (b-\gamma)\beta + (a-\delta)\gamma + (b-\alpha)\delta] =$$

$$= ab - \frac{1}{2}[a(\alpha+\gamma) + b(\beta+\delta) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha)] =$$

$$= ab - \frac{1}{2}[(\alpha+\gamma)a + (\beta+\delta)b - (\alpha+\gamma)(\beta+\delta)].$$

Но (ср. с решением задачи а))

$$\alpha + \gamma = \sqrt{2}\,(h_A + h_C) = \sqrt{2}\,\frac{3\sqrt{2}}{2} = 3$$

и

$$\beta + \delta = \sqrt{2}\,(h_B + h_D) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$

откуда и следует, что

$$S_{RUWY} = 5\cdot 4 - \frac{1}{2}(3\cdot 5 + 1\cdot 4 - 3\cdot 1) = 20 - \frac{1}{2}\cdot 16 = 12$$

независимо от расположения прямоугольников p и P. Точно так же устанавливается, что

$$S_{TVXZ} = S_{ABCD} - S_{ATV} - S_{BVX} - S_{CXZ} - S_{DZT} =$$

$$= ab - \frac{1}{2}[(b-\delta)\alpha + (a-\alpha)\beta + (b-\beta)\gamma + (a-\gamma)\delta] =$$

$$= ab - \frac{1}{2}[(\beta+\delta)a + (\alpha+\gamma)b - (\alpha+\gamma)(\beta+\delta)],$$

т. е.

$$S_{TVXZ} = 5\cdot 4 - \frac{1}{2}(1\cdot 5 + 3\cdot 4 - 3\cdot 1) = 20 - \frac{1}{2}\cdot 14 = 13.$$

Перейдем теперь к тому случаю, когда «восьмиугольник» q фактически является пятиугольником (ср. рис. 97, *б*). Одна сторона этого пятиугольника целиком принадлежит стороне p и одна — стороне P; рассматривая отдельно случаи, когда сторона q принадлежит большей и меньшей стороне p и когда сторона q принадлежит большей и меньшей стороне P, мы получим следующие четыре типа рассматриваемых пятиугольников.

1° *Одна сторона пятиугольника q принадлежит большей стороне прямоугольника P* (например, стороне AB), *другая — большей*

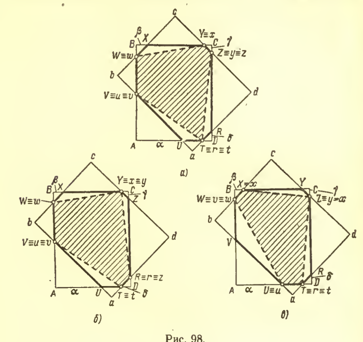


Рис. 98.

стороне p (скажем, стороне cd; рис. 98, *а*). В этом случае, очевидно, имеем

$$S_q = S_{TVWYZ} = S_{ABCD} - S_{ATV} - S_{BWY} - S_{CYZ} - S_{DZT} =$$

$$= ab - \frac{1}{2}\left[(b-\delta)\alpha + (b-\gamma)\beta + \gamma^2 + (a-\gamma)\delta\right] =$$

$$= ab - \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)b + \delta a - (\alpha+\gamma)\delta + \gamma^2 - \beta\gamma\right],$$

или, поскольку $a = 5$, $b = 4$, $\alpha + \gamma = 3$ (т. е. $\alpha = 3 - \gamma$) и $\beta + \delta = 1$ (т. е. $\beta = 1 - \delta$),

$$S_q = 5\cdot 4 - \frac{1}{2}\left[(4-\gamma-\delta)\cdot 4 + \delta\cdot 5 - 3\delta + \gamma^2 - (1-\delta)\gamma\right] =$$

$$= 20 - \frac{1}{2}\left[16 - 5\gamma - 2\delta + \gamma^2 + \delta\gamma\right] =$$

$$= 20 - 8 + \frac{1}{2}\left[2\delta + (5-\gamma-\delta)\gamma\right] \geqslant 12,$$

ибо $\delta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$ и $\gamma + \delta < 5$ (так как $\gamma \leqslant 3$ и $\delta \leqslant 1$).

2°. *Одна сторона пятиугольника q принадлежит большей стороне прямоугольника P* (например, стороне *AB*), *другая — меньшей стороне p* (стороне *ad*; рис. 98, *б*). В этом случае имеем

$$S_q = S_{RTVWY} = S_{ABCD} - S_{ATV} - S_{BWY} - S_{CYR} - S_{DRT} =$$
$$= ab - \frac{1}{2}[(b-\delta)\alpha + (b-\gamma)\beta + (a-\delta)\gamma + \delta^2] =$$
$$= ab - \frac{1}{2}[(\alpha+\beta)b + \gamma a - (\alpha+\gamma)\delta - \beta\gamma + \delta^2] =$$
$$= 5\cdot 4 - \frac{1}{2}[(4-\gamma-\delta)\cdot 4 + \gamma\cdot 5 - 3\delta - (1-\delta)\gamma + \delta^2] =$$
$$= 20 - \frac{1}{2}[16 - 7\delta + \gamma\delta + \delta^2] = 20 - 8 + \frac{1}{2}(7-\gamma-\delta)\delta \geqslant 12,$$

так как $\delta \geqslant 0$ и, очевидно, $\gamma + \delta < 7$.

3°. *Одна сторона пятиугольника q принадлежит большей стороне прямоугольника p* (скажем, стороне *ab*), *а другая — меньшей стороне прямоугольника P* (стороне *BC*; см. рис. 97, *б*). Тогда

$$S_q = S_{RUVXY} = S_{ABCD} - S_{AUV} - S_{BVX} - S_{CYR} - S_{DRU} =$$
$$= ab - \frac{1}{2}[\alpha^2 + (a-\alpha)\beta + (a-\delta)\gamma + (b-\alpha)\delta] =$$
$$= ab - \frac{1}{2}[(\beta+\gamma)a + \delta b - (\alpha+\gamma)\delta - \alpha\beta + \alpha^2] =$$
$$= 5\cdot 4 - \frac{1}{2}[(4-\alpha-\delta)\cdot 5 + \delta\cdot 4 - 3\delta - (1-\delta)\alpha + \alpha^2] =$$
$$= 20 - \frac{1}{2}[20 - 6\alpha - 4\delta + \alpha\delta + \alpha^2] =$$
$$= 20 - 10 + \frac{1}{2}[4\delta + (6-\alpha-\delta)\alpha] \geqslant 10,$$

поскольку $\delta \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$ и, разумеется, $\alpha + \delta < 6$.

4°. *Одна сторона пятиугольника q принадлежит меньшей стороне P* (например, стороне *AD*), *другая — меньшей стороне p* (стороне *bc*; рис. 98, *в*). В этом случае получаем

$$S_q = S_{TUWXZ} = S_{ABCD} - S_{AUW} - S_{BWX} - S_{CXZ} - S_{DZT} =$$
$$= ab - \frac{1}{2}[(a-\beta)\alpha + \beta^2 + (b-\beta)\gamma + (a-\gamma)\delta] =$$
$$= ab - \frac{1}{2}[(\alpha+\delta)a + \gamma b - (\beta+\delta)\gamma + \beta^2 - \alpha\beta] =$$
$$= 5\cdot 4 - \frac{1}{2}[(4-\beta-\gamma)\cdot 5 + \gamma\cdot 4 - \gamma + \beta^2 - (3-\gamma)\beta] =$$
$$= 20 - \frac{1}{2}[20 - 8\beta - 2\gamma + \beta^2 + \beta\gamma] =$$
$$= 20 - 10 + \frac{1}{2}[2\gamma + (8-\beta-\gamma)\beta] \geqslant 10,$$

ибо $\beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$ и $\beta + \gamma < 8$.

Таким образом, во всех случаях $S_q \geqslant 10$; равенство $S_q = 10$ имеет место, например, если в условиях рис. 97, *б* $\alpha = \delta = 0$ (рис. 99). В этом случае восьмиугольник Q вырождается в пятиугольник, а q вырождается в треугольник (почему?).

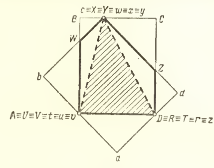


Рис. 99.

47. Площадь будет наибольшей в том случае, когда все полосы сдвинуты в положение, при котором они имеют общий центр симметрии. Доказательство этого, аналогичное решению задачи 46а) (см., в частности, примечание в конце этого решения), предоставляется читателю.

Примечание. Условие «симметричного расположения» всех полос является **достаточным** для того, чтобы площадь их пересечения была наибольшей из всех возможных, но оно может и

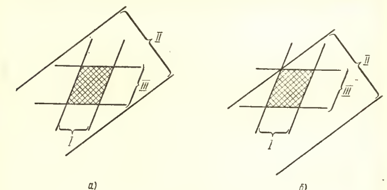


Рис. 100.

не быть **необходимым** для этого (ср. очевидные рис. 100, *а*, и *б*, на которых площадь пересечения полос *I*, *II* и *III* одинакова).

48. Пусть прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ со сторонами $A_1B_1 = a$ и $A_1D_1 = b$ и площадью S отсекает от равного ему прямоугольника

$ABCD$ треугольники AKL, BMN, CPQ и DRT (рис. 101, a). Достроим эти четыре треугольника до прямоугольников $AKLA'$, $BMNB'$, $CPQC'$ и $DRTD'$ (эту операцию можно понимать как своеобразное «загибание уголков» бумажного прямоугольника $ABCD$) и докажем, что

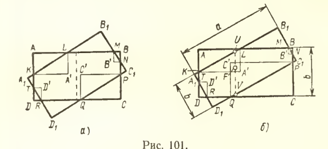


Рис. 101.

изображенные на рис. 101, a тонкими линиями треугольники $A'KL$, $B'MN$, $C'PQ$ и $D'RT$ попарно не пересекаются; отсюда уже будет следовать, что

$$S_{\triangle AKL} + S_{\triangle BMN} + S_{\triangle CPQ} + S_{\triangle DRT} < S_{KLMNPQRT},$$

т. е. что

$$S_{KLMNPQRT} > \frac{1}{2} S.$$

В самом деле, два «соседних» треугольника, скажем $A'KL$ и $B'MN$, не могут пересечься потому, что любая параллельная $AD \parallel BC$ прямая l, пересекающая отрезок LM стороны AB прямоугольника $ABCD$, отделяет их друг от друга. Если же имеют общую точку F «противоположные» треугольники, например $A'KL$ и $C'PQ$ (рис. 101, $б$), то проходящая через F прямая, параллельная $AD \parallel BC$, пересекает гипотенузы KL и PQ этих треугольников в таких точках U и V, что $UV < AD = b$; однако это противоречит очевидному неравенству $UV > A_1D_1 = b$.

Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

49. Заключим плот F, про который мы считаем, что его площадь $\geqslant 2\sqrt{2}$ и что он еще не достиг поворота канала, в наименьший возможный прямоугольник $P \equiv A_1B_1B_2A_2$, ограниченный берегами канала и

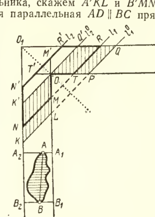


Рис. 102.

двумя перпендикулярными берегам отрезками (рис. 102). Так как площадь плота $\geqslant 2\sqrt{2}$, то тем более $> 2\sqrt{2}$ площадь прямоугольника P ширины 1; поэтому, если A и B — точки перпендикулярных каналу сторон A_1A_2 и B_1B_2 прямоугольника, в которых эти

стороны соприкасаются с F, то $AB \geqslant A_1B_1 \geqslant 2\sqrt{2}$. Отсюда, в точности как в решении задачи 81 ниже, устанавливается, что если плот может пройти поворот канала, то в процессе своего движения отрезок AB (а значит, и весь плот) повернется по отношению к своему первоначальному положению на угол $> 45°$.

Рассмотрим теперь то положение плота F, когда он повернулся ровно на $45°$ [1]); при этом прямоугольник P, который мы считаем жестко скрепленным с плотом, также повернется на $45°$ по отношению к своему исходному положению (прямоугольник P в процессе движения плота может, разумеется, и выйти за пределы канала). В этот момент стороны прямоугольника, первоначально совпадающие с берегами канала, совпадут с какими-то прямыми l_1 и l_2 перпендикулярными биссектрисе образованного каналом угла; расстояние между l_1 и l_2 равно 1.

Прямые l_1 и l_2 не могут спуститься «ниже» изображенных на рис. 102 прямых l_1^0 и l_2^0, так как иначе пересечение ограниченной l_1 и l_2 полосы с каналом распалось бы на два параллелограмма площади $\sqrt{2}$ (напомним, что как ширина канала, так и расстояние между l_1 и l_2 равны 1) и (состоящий из одного куска!) плот заключался бы в одном из этих параллелограммов, т. е. его площадь была бы даже $\leqslant \sqrt{2}$. Но если l_1 и l_2 расположены «выше» прямых l_1^0 и l_2^0, то площадь пересечения образованной l_1 и l_2 полосы с каналом отличается от площади двух ограниченных l_1^0 и l_2^0 параллелограммов площади $\sqrt{2}$ (они заштрихованы на рис. 102) тем, что от общей площади параллелограммов отнимаются два «малых» параллелограмма $KLMN$ и $PQRT$, а прибавляются равные им, но п е р е к р ы в а ю щ и е с я параллелограммы $K'OM'N'$ и $OQ'R'T'$. Этим доказано, что площадь пересечения ограниченной l_1 и l_2 полосы (содержащей прямоугольник P, а значит, и плот F) с каналом меньше общей площади $2\sqrt{2}$ заштрихованных на рис. 102 параллелограммов, а значит, тем более будет $< 2\sqrt{2}$ и площадь плота F!

50. Докажем предварительно, что *если в пространстве даны две не параллельные прямые a и b и из трех последовательных точек A_1, A_2, A_3 прямой a опущены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 на прямую b, то A_2B_2 меньше одного из двух отрезков A_1B_1 и A_3B_3.* Действительно, проведем через прямую b плоскость M, параллельную прямой a (рис. 103) и пусть A_1', A_2', A_3' — проекции точек A_1, A_2, A_3 на плоскость M. На основании теоремы о трех перпендикулярах заключаем, что $A_1'B_1$, $A_2'B_2$, $A_3'B_3 \perp b$. Так как отрезок $A_2'B_2$, очевидно, меньше одного из двух отрезков $A_1'B_1$, $A_3'B_3$, то отрезок A_2B_2 меньше одного из двух отрезков A_1B_1, A_3B_3, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к решению поставленной задачи.

1°. Пусть в треугольной пирамиде (тетраэдре) $ABCD$ сечение RCD *проходит через ребро* CD (рис. 104, *а*). В треугольниках ACD, RCD, BCD при общем основании CD высоты, опущенные на эту сторону, суть перпендикуляры, рассмотренные выше. Так как R

[1]) См. подстрочное примечание [2]) на стр. 303.

лежит между A и B, то S_{BCD} меньше площади одного из треугольников ACD и BCD.

2°. Пусть сечение APR *проходит через вершину* A тетраэдра (рис. 104, *б*). Соединим P с противолежащей вершиной D треугольника BCD. Тогда в тетраэдре $PABD$ треугольное сечение PAR проходит через ребро AP; поэтому либо $S_{PAR} < S_{PAB}$ либо $S_{PAR} <$

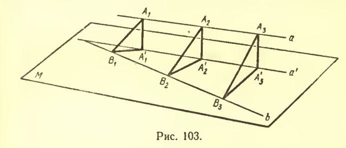


Рис. 103.

$< S_{APD}$. В первом случае имеем $S_{PAR} < S_{ABC}$, так как $\triangle PAB$ есть часть треугольника ABC; то втором случае, применяя к сечению ADP тетраэдра $ABCD$ результат п. 1°, находим, что S_{APD} меньше площади одной из граней ACD или ABD, поэтому и подавно то же имеет место по отношению к S_{PAR}. Итак, наше утверждение доказано и для этого вида треугольных сечений.

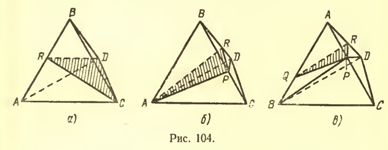


Рис. 104.

3°. Рассмотрим, наконец, сечение PQR наиболее *общего вида* (рис. 104, *в*). Произвольную вершину P треугольника PQR, лежащую на ребре AC тетраэдра, соединим с концами B и D противоположного ребра BD. По доказанному в п. 2° S_{PQR} меньше площади хотя бы одной грани тетраэдра $PABD$. Но для любой грани тетраэдра $PABD$ найдется равная ей или бо́льшая грань тетраэдра $CABD$. Действительно, грань ABD у этих двух тетраэдров общая, $\triangle PAB$ и $\triangle PAD$ суть части $\triangle ABC$, соответственно $\triangle ADC$, а S_{PBD} меньше либо S_{BAD}, либо S_{BCD}, так как PBD есть сечение тетраэдра $ABCD$, проходящее через его ребро. Отсюда следует справедливость теоремы.

51. а) Проекция любого многогранника на плоскость есть многоугольник, вершины которого являются проекциями некоторых вершин многогранника. Так как у тетраэдра четыре вершины, то

в зависимости от выбора плоскости проекций его проекция может быть либо *треугольником*, либо *четырехугольником*. Рассмотрим оба эти случая.

1°. Пусть правильный тетраэдр $ABCD$ проектируется в *треугольник* $A'B'C'$, совпадающий с проекцией одной из его граней —

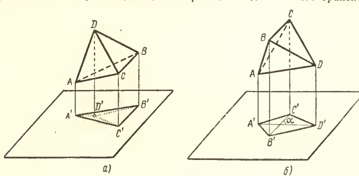


Рис. 105.

грани ABC (рис. 105, *а*). По известной формуле для площади ортогональной проекции плоской фигуры имеем

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC}\cos\varphi \leqslant S_{ABC};$$

здесь φ — угол между плоскостью граии и плоскостью проекции. Площадь проекции будет *наибольшей*, когда $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$, т. е. когда плоскость ABC параллельна плоскости проекции; в этом случае

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где a —ребро правильного тетраэдра $ABCD$.

2°. Правильный тетраэдр $ABCD$ проектируется в *четырехугольник* $A'B'C'D'$ (рис. 105, *б*). Воспользуемся известной формулой для площади четырехугольника:

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\,A'D'\cdot B'C'\sin\alpha,$$

где α — угол между диагоиалями $A'D'$ и $B'C'$ четырехугольника $A'B'D'C'$ (см. решение задачи 45а)). Но $A'D'$ и $B'C'$ являются (ортогональными) проекциями ребер AD и BC тетраэдра $ABCD$. Поэтому $A'D' = a\cos\psi$, $B'C' = a\cos\chi$, где $a = AD = BC$, а ψ и χ — углы, образованные ребрами AD и BC с плоскостью проекции. Площадь $S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}a^2\cos\psi\cos\chi\sin\alpha$ будет *наибольшей*, если $\cos\psi = \cos\chi = \sin\alpha = 1$, т. е. при $\psi = \chi = 0$, $\alpha = 90°$.

Чтобы получить такую проекцию тетраэдра наибольшей площади, построим куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и впишем

в него правильный тетраэдр $ACB'D'$ с ребром a (рис. 106). Очевидно, что проекцией этого тетраэдра на любую грань куба будет квадрат; угол между диагоналями квадрата — прямой, а сами диагонали равны ребрам тетраэдра. Таким образом, наибольшая площадь четырехугольной проекции тетраэдра равна $\frac{a^2}{2}$, что больше, чем наибольшая площадь $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ его треугольной проекции.

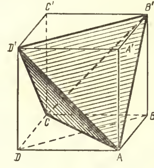


Рис. 106.

Итак, *из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра наибольшую площадь имеет квадрат, получающийся при проектировании тетраэдра на плоскость, параллельную любым двум его скрещивающимся ребрам.*

б) Ясно, что тень (ортогональная проекция на плоскость) куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a представляет собой *центрально-симметричный шестиугольник* $A_1'B_1'C_1'C'D'A'$ (который может «вырождаться» в параллелограмм), противоположные стороны которого равны и параллельны; этот шестиугольник состоит из трех параллелограммов — проекций трех граней куба (на рис. 107 — граней AA_1B_1B, $ABCD$ и BB_1C_1C; проекции остальных трех граней заполняют тот же шестиугольник). Обозначим углы, которые образуют эти три грани с плоскостью проекции, через α, β и γ; тогда

$$S_{A'A_1'B_1'B'} = a^2\cos\alpha,$$

$$S_{A'B'C'D'} = a^2\cos\beta,$$

$$S_{B'B_1'C_1'C'} = a^2\cos\gamma$$

и

$$S_{A_1'B_1'C_1'C'D'A'} = a^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

Рис. 107.

С другой стороны, очевидно,

$$\alpha = \angle(AA', AD), \qquad \beta = \angle(AA', AA_1), \qquad \gamma = \angle(AA', AB),$$

где AA' — «проектирующая» прямая, параллельная направлению солнечных лучей (мы предположили, что оно перпендикулярно плоскости проектирования). Разлагая единичный вектор $\overline{Ae}$ направления AA' по составляющим, направленным по (взаимно перпендикулярным!) ребрам AD, AA_1 и AB куба, получаем

$$\overline{Ae} = \overline{Ad} + \overline{Aa_1} + \overline{Ab},$$

где

$$1 = Ae^2 = (\overline{Ae})^2 = (\overline{Ad} + \overline{Aa}_1 + \overline{Ab})^2 = \overline{Ad}^2 + \overline{Aa}_1^2 + \overline{Ab}^2 = (Ad)^2 + (Aa_1)^2 + (Ab)^2$$

и

$$Ad = \cos\alpha, \qquad Aa_1 = \cos\beta, \qquad Ab = \cos\gamma.$$

Таким образом, получаем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Теперь из алгебраического неравенства [1])

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \qquad (*)$$

(где a, b, c — произвольные положительные числа), вытекающего из того, что

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc) = \frac{1}{9}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geqslant 0$$

(равенство в (*) имеет место лишь при $a = b = c$), получаем

$$S_{A_1'B_1'C_1'C'D'A'} = 3a^2\,\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} \leqslant 3a^2\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3}} = \frac{3a^2}{\sqrt{3}} = a^2\sqrt{3},$$

где равенство достигается лишь при $\alpha = \beta = \gamma$, т. е. при проектировании куба *в направлении его диагонали* (в нашем случае диагонали BD_1; в этом случае проекция $A_1'B_1'C_1'C'D'A'$ будет представлять собой правильный шестиугольник).

Примечание. Предоставляем читателю самостоятельно разобрать случай, когда солнце не находится в зените, т. е. когда тень представляет собой *параллельную*, но, вообще говоря, уже не обязательно ортогональную, проекцию на плоскость — правильного тетраэдра, соответственно куба (при этом по-прежнему максимум площади проекции достигается, если расположить рассматриваемый многогранник так, чтобы солнечные лучи были параллельны двум противоположным ребрам тетраэдра, соответственно диагонали куба), а также случаи, когда тетраэдр не является правильным или куб заменяется произвольным (скажем, прямоугольным) параллелепипедом.

[1]) Ср. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра), задачи 281—283.

52. а) Если O — центр искомого центрально-симметричного многоугольника m, то, симметрично отразив от O данный $\triangle ABC \equiv T$ вместе с m (который при этом перейдет в себя), мы убедимся, что m вписан также и в $\triangle A_1B_1C_1 \equiv T_1$, симметричный $\triangle ABC$ относительно O. А так как пересечение[1]) $n = T \cap T_1$ треугольников T и T_1 является, очевидно, центрально-симметричным многоугольником с центром O, то *наибольший вписанный в T центрально-симметричный многоугольник с центром O совпадает с n.*

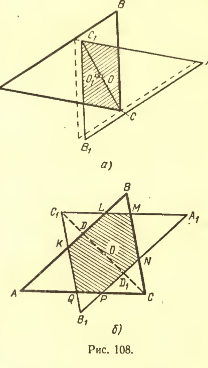


Рис. 108.

Теперь нам осталось выбрать точку O таким образом, чтобы многоугольник $n = T \cap T_1$ имел наибольшую возможную площадь. В зависимости от положения точки O многоугольник n может быть *параллелограммом* (рис. 108, а) или *центрально-симметричным шестиугольником* (рис. 108, б). Однако сразу видно, что в случае, когда n представляет собой параллелограмм, всегда можно так изменить положение точки O, чтобы n стал шестиугольником и увеличился по площади (см. рис. 108, а)[2]). Следовательно, наибольший вписанный в данный треугольник ABC центрально-симметричный многоугольник должен быть *шестиугольником.*

Обозначим шестиугольник n через $KLMNPQ$ (см. рис. 108, б). Для того чтобы площадь n была возможно больше, надо, чтобы сумма площадей треугольников LBM, NCP и QAK была возможно меньше. Но все эти треугольники подобны $\triangle ABC$; площадь каждого из них относится к площади $\triangle ABC$ соответственно, как $\frac{LB^2}{AB^2}$, $\frac{NP^2}{AB^2}$ и $\frac{AK^2}{AB^2}$ и, следовательно, сумма их

[1]) Ср. решение задачи 46 а).

[2]) Параллелограмм, один угол которого совпадает с углом треугольника ABC, а противоположная вершина лежит на противолежащей стороне треугольника, мы для удобства считаем «шестиугольником» с двумя противоположными сторонами, равными нулю.

площадей относится к площади $\triangle ABC$, как $\frac{LB^2 + NP^2 + AK^2}{AB^2}$. Следовательно, нам остается выбрать точку O таким образом, чтобы сумма $LB^2 + NP^2 + AK^2$ была возможно меньшей.

Так как $NP = KL$ (противоположные стороны шестиугольника $KLMNPQ$ симметричны относительно O и, следовательно, равны), то

$$AK + NP + LB = AK + KL + LB = AB.$$

Обозначим $AK = x$, $NP = y$, $LB = z$, $AB = x + y + z = a$. Нетрудно показать, что сумма $x^2 + y^2 + z^2$ достигает минимума при $x = y = z = \frac{a}{3}$. Действительно,

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{(x + y + z)^2}{3} \geqslant 0$$

(ср. с решением задачи 51 б)). Таким образом, сумма $x^2 + y^2 + z^2 = AK^2 + KL^2 + LB^2$ будет иметь наименьшее значение, если $AK = KL = LB = \frac{AB}{3}$ (т. е. $x - y = x - z = y - z = 0$). В этом случае площадь каждого из трех треугольников, отсекаемых от $\triangle ABC$ сторонами $\triangle A_1B_1C_1$, равна $\frac{1}{9} S_{ABC}$ и, следовательно, $S_n = \frac{2}{3} S_{ABC}$.

Остается выяснить, для какого положения точки O имеют место равенства $AK = KL = LB$. Соединим точки C и C_1. Прямая CC_1 проходит через O и пересекает AB и A_1B_1 в точках, которые мы обозначим через D и D_1. Из соображений симметрии следует, что

$$OD = OD_1, \qquad DC_1 = D_1C,$$

а из того, что $KL = \frac{1}{3} A_1B_1$, вытекает

$$DC_1 = \frac{1}{3} DC.$$

Отсюда получаем

$$C_1D = DO = OD_1 = D_1C,$$

и значит,

$$CO = \frac{2}{3} CD$$

— *заключенный внутри* $\triangle ABC$ *отрезок прямой* CO *делится точкой* O *в отношении* $2:1$, *считая от вершины*. Точно так же доказывается, что отрезки прямых, проходящих через точку O и вершину A, соответственно B, заключенные внутри треугольника ABC, делятся точкой O в отношении $2:1$, считая от вершины. Из этого нетрудно вывести, что O есть *точка пересечения медиан* треугольника ABC; в этом случае *площадь* шестиугольника $m \equiv n = T \cap T_1$ равна $\frac{2}{3}$ площади S треугольника T $\left(= \frac{2}{3}, \text{ если } S = 1\right)$.

б) Пусть $\triangle ABC$ заключен внутри выпуклого центрально-симметричного многоугольника M с центром O. Симметрия относительно O переводит M в себя и переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A'B'C'$, который также, очевидно, должен заключаться внутри M. Отсюда следует, что *наименьший по площади выпуклый центрально-симметричный многоугольник с центром симметрии в точке O, заключающий внутри себя $\triangle ABC$, совпадает с наименьшим выпуклым многоугольником, содержащим внутри себя $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, т. е. с выпуклой оболочкой шести точек A, B, C, A', B', C'* (ср. с началом решения задачи 25; так как A и A', B и B', C и C' симметричны относительно O, то эта выпуклая оболочка — центрально-симметричный многоугольник с центром O).

Пересечение $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ может быть *параллелограммом* или *центрально-симметричным шестиугольником*. В первом случае выпуклая оболочка точек A, B, C, A', B', C' представляет собой изображенный на рис. 109, *а* параллелограмм $ABA'B'$, площадь которого

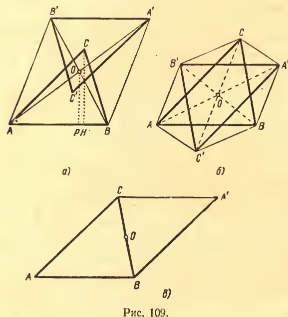


Рис. 109.

не может быть меньше удвоенной площади $\triangle ABC$. В самом деле,

$$S_{ABA'B'} = 4S_{AOB};$$

но $S_{AOB} > \frac{1}{2} S_{ABC}$, ибо если бы высота OP треугольника AOB была меньше половины высоты CH треугольника ABC, то точка C' находилась бы вне $\triangle ABC$ (за стороной AB) и пересечение $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ не было бы параллелограммом.

Во втором случае выпуклая оболочка рассматриваемых точек представляет собой центрально-симметричный шестиугольник $AC'BA'CB'$ (рис. 109, *б*), площадь которого в точности *равна удвоенной площади* $\triangle ABC$. В самом деле,

$$S_{AC'BA'CB'} = S_{OAB'} + S_{OA'B} + S_{OCA'} + S_{OC'A} + S_{OBC'} + S_{OB'C} = \\ = 2S_{OAB'} + 2S_{OCA'} + 2S_{OBC'};$$

но

$$S_{OAB'} = S_{OAB},$$

ибо AO есть медиана треугольника $AB'B$, и аналогично

$$S_{OCA'} = S_{OCA}, \qquad S_{OBC'} = S_{OBC};$$

следовательно,

$$S_{AC'BA'CB'} = 2S_{OAB} + 2S_{OCA} + 2S_{OBC} = 2S_{ABC}.$$

Простейший пример центрально-симметричного многоугольника (наименьшей возможной) площади $2S_{ABC}$ (т. е. площади 2, если $S_{ABC} = 1$), заключающей внутри себя $\triangle ABC$, доставляет *параллелограмм* $ABA'C$ (рис. 109, *в*).

53. Ясно, что каждая отличная от *центра тяжести* M (*точки пересечения медиан*) внутренняя точка Q треугольника ABC находится внутри хоть одного из треугольников площади $\frac{4}{9}S_{ABC}$, отсекаемых от $\triangle ABC$ параллельными его сторонам прямыми, проходящими через M (рис. 110, *а*); поэтому прямая l, проходящая

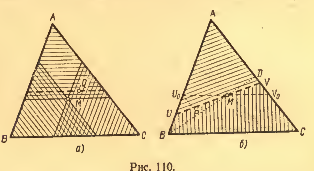


Рис. 110.

через Q и параллельная «основанию» отсекаемого треугольника, делит $\triangle ABC$ на части, отношение меньшей из которых к большей будет меньше чем

$$\left(\frac{4}{9}S_{ABC}\right) : \frac{5}{9}S_{ABC} = 4:5.$$

С другой стороны, если $Q \equiv M$, то отношение $S_1 : S_2$ площадей частей, на которые разбивают $\triangle ABC$, проходящая через $Q = M$

прямая l, всегда заключается в пределах

$$\frac{4}{5} \leqslant \frac{S_1}{S_2} \leqslant \frac{5}{4}.$$

В самом деле, если прямая l пересекает стороны AB и AC треугольника в точках U и V, а проходящая через M прямая $l_0 \parallel BC$ пересекает эти стороны в точках U_0 и V_0, то в случае $UM > MV$ из рис. 110, б, где $U_0P \parallel AC$, следует

$$S_{AUV} = S_{AU_0V_0} + S_{U_0UM} - S_{VV_0M} = S_{AU_0V_0} + S_{MU_0P} +$$

$$+ S_{U_0PU} - S_{MV_0V} = S_{AU_0V_0} + S_{U_0PU} \geqslant S_{AU_0V_0} = \frac{4}{9} S_{ABC};$$

поэтому здесь

$$\frac{S_{AUV}}{S_{UBCV}} \geqslant \frac{4/9}{5/9} = \frac{4}{5}.$$

Но

$$\frac{S_{AUV}}{S_{UBCV}} \leqslant 1,$$

поскольку

$$S_{AUV} = S_{ABD} - S_{MUB} + S_{MDV} \leqslant S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABC},$$

ибо $UM \geqslant MV$ по предположению, $BM = 2MD > MD$, и значит, $S_{MUB} \geqslant S_{MDV}$.

Итак, наиболее выгодной является точка M, для которой рассматриваемое отношение площадей k заключено в пределах

$$\frac{5}{4} \geqslant k \geqslant \frac{4}{5}.$$

54. а) Будем считать стороны квадрата K горизонтальными и вертикальными и сдвинем параллельно фигуру Ф на расстояние 0,001 в направлении одной из сторон квадрата, скажем, слева направо. Так как Ф не содержит точек, удаленных друг от друга на расстояние 0,001, то полученная таким сдвигом фигура Ф′ *не пересечется* с фигурой Ф; далее, обе они располагаются внутри прямоугольника, три стороны которого совпадают со сторонами K, а четвертая получена из правой стороны K сдвигом ее на 0,001 вправо. Сдвинем теперь Ф на то же расстояние 0,001 в направлении, образующем угол в 60° с направлением первоначального сдвига, скажем, вправо и вверх (рис. 111, а, где a' и a'' — векторы рассматриваемых сдвигов). Полученная фигура Ф″ содержится внутри квадрата K_1 со стороной 1,001, полученного из K сдвигом его правой и верхней сторон на расстояние 0,001 во внешнюю по отношению к K сторону (и даже в несколько меньшем прямоугольнике, что нам, впрочем, совсем не будет важно); кроме того, она, так же как и Ф′, не пересекает Ф. Но, более того, Ф″ *не пересекает* также и *фигуры* Ф′. В самом деле, если некоторая точка A плоскости одновременно принадлежит и Ф′ и Ф″, и A', соответственно A'', — точки фигуры Ф, которые переводятся в точку A первым,

7*

соответственно вторым, из рассматриваемых сдвигов, то $\overline{A'A} = \boldsymbol{a}'$ и $\overline{A''A} = \boldsymbol{a}''$; поэтому в треугольнике $AA'A''$ имеем $AA' = AA'' = 0{,}001$ и $\angle A'AA'' = 60°$, и значит, $A'A'' = 0{,}001$, в то время как таких двух точек A' и A'' фигура Φ по условию не содержит.

Таким образом, три *непрекрывающиеся* фигуры Φ, Φ' и Φ'' одной и той же площади s (ведь эти фигуры равны!) расположены в квадрате K_1 площади $(1{,}001)^2$, откуда следует, что

$$s \leqslant \frac{(1{,}001)^2}{3} < 0{,}34.$$

б) Разумеется, полученная в задаче а) оценка 0,34 для площади фигуры Φ не является *наилучшей возможной*; так, например, выше мы отмечали, что фигура Φ'' (так же, как Φ и Φ')

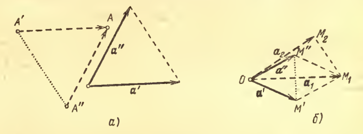


Рис. 111.

содержится не только в квадрате K_1, но и в меньшем прямоугольнике, площадь которого легко оценить. Однако подобное уточнение решения задачи а) приводит лишь к весьма незначительному усилению полученного результата; поэтому мы теперь несколько дополним соответствующее рассуждение.

Заметим, что наш вывод о том, что фигуры Φ' и Φ'' не имеют общих точек, сохраняет силу для любых двух фигур Φ_1 и Φ_2, полученных из Φ сдвигами (параллельными переносами) на такие два вектора $\boldsymbol{a}_1 = \overline{OM_1}$ и $\boldsymbol{a}_2 = \overline{OM_2}$, что вектор $\overline{M_1M_2}$ (который отвечает сдвигу, переводящему Φ_1 в Φ_2!) имеет длину 0,001. Однако если длины векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ отличны от 0,001, то мы уже не можем быть уверены в том, что фигуры Φ_1 и Φ_2 не пересекают Φ. Поэтому последнее заключение мы здесь заменим существенно более слабым утверждением о том, что хоть одна из этих двух фигур имеет «не слишком большое» пересечение с Φ: в самом деле, если площадь фигуры Φ равна s, то хоть одна из двух (непересекающихся!) фигур Φ_1 и Φ_2, например, фигура Φ_1, пересекает Φ по части, площадь которой $\leqslant \frac{1}{2}s$. Отсюда в свою очередь следует, что *площадь объединения фигур* Φ *и* Φ_1 *не превосходит* $\frac{3}{2}s$.

Вернемся теперь к определенным в решении задачи а) фигурам Φ' и Φ'' и предположим, что векторы $\boldsymbol{a}' = \overline{OM'}$ и $\boldsymbol{a}'' = \overline{OM''}$ отвечающих им сдвигов по длине и по положению на плоскости совпадают со сторонами ромба $OM'M_1M''$ с диагональю OM_1, где

$\overline{OM}_1 = a_1$ [1]) (рис. 111, б). Так как при этом Φ_1 получается из Φ' сдвигом на вектор $\overline{M'M_1}$ длины 0,001, а $\Phi'(=\Phi)$ не содержит удаленных друг от друга на расстояние 0,001 точек, то Φ' не пересекает Φ_1. Точно так же доказывается, что и Φ'' не пересекает Φ_1, т. е. что Φ' и Φ'' не пересекаются с *объединением* $\Phi \cup \Phi_1$ фигур Φ и Φ_1. Таким образом, общая площадь, покрытая фигурами Φ, Φ_1, Φ' и Φ'' не меньше чем

$$\frac{3}{2}s + s + s = \frac{7}{2}s.$$

Но все эти фигуры, очевидно, содержатся в квадрате $\overline{K}$ со стороной $1 + 0,001\sqrt{3} < 1,0018$ (и даже в несколько меньшем $\overline{K}$ квадрате, что, впрочем, лишь весьма несущественно меняет полученную ниже оценку). Отсюда следует, что

$$\frac{7}{2}s < (1,0018)^2 \quad \text{и, значит,} \quad s < \frac{2}{7}(1,0018)^2 < 0,287.$$

Примечание. Полученная в решении задачи б) оценка $s < 0,287$ также, разумеется, не является точной; было бы желательно улучшить ее (или даже найти точное значение $\inf s$, достигаемое при указанных в задаче условиях [2]), что, впрочем, видимо, совсем не просто).

55. а) Первое решение. Обозначим стороны рассматриваемых квадратов через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$; при этом по условию $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqslant \frac{1}{2}$. Будем вкладывать наши квадраты в «большой» квадрат $K = ABCD$ со стороной 1 так: сначала приложим к стороне AB квадрата K последовательно квадраты $AB_1C_1D_1$, $B_1B_2C_2D_2$, и т. д., как это изображено на схематическом рис. 112. При этом стороны приложенных к стороне AB «квадратов 1-го ряда» последовательно равны $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ (где «номер» $n_1 - 1$ последнего квадрата 1-го ряда может, разумеется, равняться единице), и это вложение мы продолжаем до тех пор, пока оно остается еще возможным, откуда следует, что

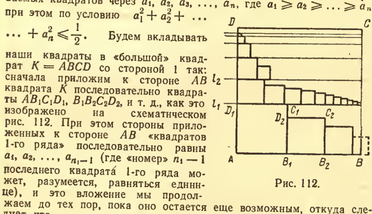


Рис. 112.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1-1} \leqslant 1, \quad \text{но} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1-1} + a_{n_1} > 1.$$

---

[1]) При этом, разумеется, оказывается, что длина вектора $\overline{OM}_1 = a_1$ равна $0,001\sqrt{3}$ — длине диагонали ромба со стороной 0,001 и острым углом в 60°; таким образом, векторы $\overline{OM}_1 = a_1$ и $\overline{OM}_2 = a_2$ надо направить по боковым сторонам равнобедренного треугольника OM_1M_2 со сторонами длин $0,001\sqrt{3}$, $0,001\sqrt{3}$ и 0,001.

[2]) Относительно смысла записи $\inf s$ см. стр. 17.

Отсечем теперь от K с помощью прямой $l_1 = D_1C_1$ полоску толщины a_1 и будем последовательно прикладывать «квадраты 2-го ряда» с длинами сторон $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_2-1}$ к прямой l_1 сверху (см. тот же рис. 112), пока это будет возможно; при этом мы будем иметь

$$a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2-1} \leqslant 1, \text{ но } a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2-1} + a_{n_2} > 1.$$

Затем так же отсечем от K с помощью прямой $l_2 \parallel AB$ еще одну полосу ширины a_{n_1} и «квадраты 3-го ряда» со сторонами $a_{n_2}, a_{n_2+1}, \ldots, a_{n_3-1}$ будем вкладывать в оставшуюся часть квадрата K ширины $1 - a_1 - a_{n_1}$ или, точнее, в расположенную над прямой l_2 «бесконечную полуполосу», поскольку верхнюю сторону DC квадрата K_1 мы пока оставим без внимания. При этом, если каждый раз мы обрываем процесс заполнения определенного ряда квадратов лишь тогда, когда сторона BC квадрата K не позволяет вместить в нашу полуполосу еще один квадрат, и если всего мы получим таким путем k рядов «меньших» квадратов, то аналогично выписанным выше неравенствам будем иметь

$$a_{n_2} + a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3-1} \leqslant 1, \text{ но } a_{n_2} + a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3-1} + a_{n_3} > 1;$$

. . . .

$$a_{n_k} + a_{n_k+1} + \ldots + a_n \leqslant 1$$

(где $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k \leqslant n$; разумеется, число квадратов в k-м ряду может равняться единице).

Для того чтобы установить возможность требуемого размещения n «малых» квадратов внутри единичного квадрата $K \equiv ABCD$, достаточно убедиться, что

$$a_1 + a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} \leqslant 1 \ (= AD).$$

Но так как $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1-1} + a_{n_1} > 1$, то

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n_1} > 1 - a_1;$$

умножая стоящие слева слагаемые соответственно на a_2, на $a_3, \ldots,$ на a_{n_1}, а выражение справа — на a_{n_1} $(\leqslant a_{n_1-1} \leqslant a_{n_1-2} \leqslant \ldots \leqslant a_2)$, получаем

$$a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n_1}^2 > (1 - a_1)\, a_{n_1}.$$

Аналогично этому из относящихся ко 2-му, к 3-му, ..., к $(k-1)$-му ряду квадратов неравенств получаем

$$a_{n_1+1}^2 + a_{n_1+2}^2 + \ldots + a_{n_2}^2 > (1 - a_{n_1})\, a_{n_2},$$

$$a_{n_2+1}^2 + a_{n_2+2}^2 + \ldots + a_{n_3}^2 > (1 - a_{n_2})\, a_{n_3},$$

. . . .

$$a_{n_{k-1}+1}^2 + a_{n_{k-1}+2}^2 + \ldots + a_{n_k}^2 > (1 - a_{n_{k-1}})\, a_{n_k}.$$

Сложим теперь полученные $k-1$ неравенств:

$$a_2^2+a_3^2+\ \dots\ +a_{n_k}^2>$$
$$>(1-a_1)\,a_{n_1}+(1-a_{n_1})\,a_{n_2}+(1-a_{n_2})\,a_{n_3}+\dots+(1-a_{n_{k-1}})\,a_{n_k}\geqslant$$
$$\geqslant(1-a_1)\,a_{n_1}+(1-a_1)\,a_{n_2}+(1-a_1)\,a_{n_3}+\ \dots\ +(1-a_1)\,a_{n_k}=$$
$$=(1-a_1)\left(a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+\ \dots\ +a_{n_k}\right).$$

Обозначим через σ сумму площадей всех n «малых» квадратов; $\sigma\leqslant\frac{1}{2}$ по условию задачи. Тогда стоящая в правой части последнего неравенства сумма равна

$$\sigma-a_1^2-a_{n_k+1}^2-\ \dots\ -a_n^2\leqslant\frac{1}{2}-a_1^2.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2}-a_1^2>(1-a_1)\left(a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+\ \dots\ +a_{n_k}\right),$$

откуда

$$a_{n_1}+a_{n_2}+\ \dots\ +a_{n_k}<\frac{\frac{1}{2}-a_1^2}{1-a_1}=1-\frac{\frac{1}{2}-a_1+a_1^2}{1-a_1},$$

и значит,

$$a_1+a_{n_1}+a_{n_2}+\ \dots\ +a_{n_k}<1-\frac{\frac{1}{2}-a_1+a_1^2}{1-a_1}+a_1=$$
$$=1-\frac{\frac{1}{2}-2a_1+2a_1^2}{1-a_1}=1-\frac{1}{2}\,\frac{(1-2a_1)^2}{1-a_1}\leqslant 1,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Требуемое утверждение можно также доказать методом математической индукции. При этом нам будет удобно несколько его обобщить (доказать больше иногда легче!), заменив следующим: *если сумма площадей n квадратов со сторонами $a_1, a_2, \dots, a_n$* (где мы по-прежнему считаем, что $a_1\geqslant a_2\geqslant\dots\geqslant a_n$) *не превосходит половины площади прямоугольника $P=ABCD$ со сторонами $AB=b$ и $BC=c$* (т. е. если $s_n=a_1^2+a_2^2+\ \dots\ +a_n^2\leqslant\frac{1}{2}\,bc$) *и если $a_1\leqslant b\leqslant c$, то эти квадраты можно без пересечения разместить внутри P.* При $n=1$ это, разумеется, очевидно; будем считать теперь наше утверждение доказанным для любого числа квадратов, меньшего какого-то заданного числа n, и докажем его для случая n квадратов.

Приложим последовательно квадраты со сторонами $a_1, a_2, \dots, a_m$ к стороне $AB=b$ прямоугольника P, как это показано

на рис. 113. (При этом мы считаем, что $(m+1)$-й квадрат вложить в «полоску» $ABED_1$ уже нельзя, т. е. что $a_1+a_2+\ldots+a_m+a_{m+1}>b$.) Если сумма $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_m^2=s_m$ площадей m квадратов (подобные обозначения мы будем употреблять и в дальнейшем) не меньше половины площади прямоугольника $ABED_1$ $\left(\text{т. е. } \frac{1}{2}a_1b\right)$, то площадь оставшихся $n-m$ квадратов не превосходит половины площади прямоугольника D_1ECD, и по предположению индукции их можно разместить в этом прямоугольнике без пересечений; поэтому нам надо лишь разобрать случай, когда $s_m<\frac{1}{2}a_1b$ (и $m<n$).

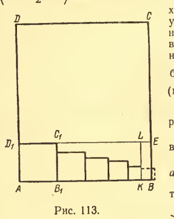


Рис. 113.

Заметим прежде всего, что в рассматриваемом случае $a_m<\frac{a_1}{2}$: ведь если $a_m\geqslant\frac{a_1}{2}$, то, очевидно, $a_2^2+a_3^2+\ldots+a_m^2\geqslant\frac{1}{2}S_{B_1C_1LK}$; а так как, кроме того, $a_1^2\geqslant a_1a_{m+1}>S_{KLEB}$, то $s_m>\frac{1}{2}S_{ABED_1}\left(=\frac{1}{2}a_1b\right)$. $\Big($Здесь также $a_1\leqslant\frac{1}{2}b$, и значит, $a_1\leqslant b-a_1$; в самом деле, если $a_1>\frac{1}{2}b$, то уже $s_1=a_1^2>\frac{1}{2}a_1b$.$\Big)$ Далее мы можем считать, что $s_n>\frac{1}{2}a_1(b+a_1)$: действительно, если бы было $s_n=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\leqslant\frac{1}{2}a_1(b+a_1)$, то мы имели бы

$$a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=s_n-a_1^2\leqslant\frac{1}{2}a_1(b+a_1)-a_1^2=$$
$$=\frac{1}{2}a_1(b-a_1)=\frac{1}{2}S_{B_1BEC_1}$$

— и по преположению индукции все квадраты с 2-го до последнего можно без пересечений разместить в прямоугольнике B_1BEC_1. С другой стороны, $s_m<\frac{1}{2}a_1b<\frac{1}{2}a_1(b+a_1)$; обозначим через k такой номер (где $m\leqslant k<n$), что

$$s_k=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2\leqslant\frac{1}{2}a_1(b+a_1),$$

но

$$s_{k+1}=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2+a_{k+1}^2>a_1(b+a_1).$$

Далее имеем

$$a_2^2+a_3^2+\ \dots\ +a_k^2=s_k-a_1^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}a_1(b+a_1)-a_1^2=\frac{1}{2}a_1(b-a_1)=\frac{1}{2}S_{B_1BEC_1},$$

откуда вытекает, что все квадраты с 2-го по k-й можно без пересечений расположнть в прямоугольнике B_1BEC_1 н

$$a_2^2+a_3^2+\ \dots\ +a_k^2=$$

$$=s_{k+1}-a_1^2-a_{k+1}^2>\frac{1}{2}a_1(b+a_1)-a_1^2-a_{k+1}^2=$$

$$=\frac{1}{2}a_1b-a_1^2+\left(\frac{1}{2}a_1^2-a_{k+1}^2\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}a_1b-a_1^2+\left(\frac{1}{2}a_1^2-a_m^2\right)>\frac{1}{2}a_1b-a_1^2,$$

и значит,

$$s_k=a_1^2+a_2^2+\ \dots\ +a_k^2>\frac{1}{2}a_1b,$$

а следовательно,

$$a_{k+1}^2+a_{k+2}^2+\ \dots\ +a_n^2=s_n-s_k<\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}a_1b=$$

$$=\frac{1}{2}b(c-a_1)=\frac{1}{2}S_{D_1ECD},$$

н все оставшиеся квадраты (с $(k+1)$-го по n-й!) можно без пересечения разместить в прямоугольнике D_1ECD.

б) Докажем, что *если два квадрата со сторонами m и n могут быть без пересечения расположены внутри квадрата со стороной a, то $m+n\leqslant a$*; отсюда уже будет следовать, что *два квадрата со стороной $\frac{1}{2}$* (сумма площадей которых в точности равна $\frac{1}{2}$!) *не могут быть без пересечений размещены в квадрате со стороной* <1. В самом деле, если K_1 и K_2 — два непересекающихся квадрата, то найдется прямая l, которая их «разделяет», т. е. такая, что K_1 и K_2 лежат по р а з н ы е стороны от l. Действительно, пусть $A_1\in K_1$ н $A_2\in K_2$ — такие точки нашнх квадратов, что никакие другие точки K_1, соответственно K_2, не удалены друг от друга на расстояние $<A_1A_2$ (рнс. 114); через l мы обозначнм прямую, перпендикулярную A_1A_2 и проходящую через середнну S отрезка A_1A_2. Еслн бы квадрат K_2 содержал точку B, расположенную по ту

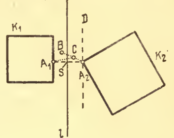


Рис. 114.

же сторону от l, что и точка A_1, то он (по очевидному свойству квадрата!) наряду с точками A_2 и B содержал бы и весь отрезок A_2B; но при этом для близкой к A_2 точки C отрезка A_2B наверняка было бы $A_1C < A_1A_2$ (ибо если $A_2D \perp A_1A_2$, то в обозначениях рис. 114 $\angle A_1A_2B < \angle A_1A_2D = 90°$), что противоречит определению точек A_1 и A_2.

Проведем теперь прямую $l = MN$, разделяющую два квадрата K_1 и K_2 со сторонами m и n, расположенные в квадрате $K \equiv ABCD$ со стороной a (рис. 115, где квадраты K_1 и K_2 изображены пунктиром); пусть K_1 попадает при этом в часть $ABMN$ квадрата K, а K_2 — в часть $MCDN$; кроме того, пусть еще $\angle MNA \leqslant 90°$. Сдвинем теперь квадрат K_1 в направлении BA, а затем в направлении DA так, чтобы его вершины (обозначим их P_1 и Q_1) попали на стороны AB и AD квадрата K; аналогично сдвинем K_2 в угол C квадрата K. (Сдвинутые квадраты мы по-прежнему будем обозначать через K_1 и K_2.) Соединим A с центром O_1 квадрата $K_1 \equiv \equiv P_1Q_1R_1T_1$ (в новом его положении); при этом из рассмотрения описанной вокруг четырехугольника

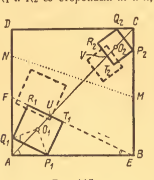


Рис. 115.

$AP_1O_1Q_1$ окружности без труда вытекает, что $\angle O_1AP_1 = \angle O_1Q_1P_1 = 45°$ и $\angle O_1AQ_1 = 45°$. Отсюда следует, что прямая AO_1 — биссектриса $\angle BAD$, и, значит, она совпадает с диагональю AC квадрата $ABCD$. Аналогичное рассуждение показывает, что диагональ AC проходит и через центр O_2 квадрата $K_2 = P_2Q_2R_2T_2$ (в новом его положении); пусть она пересекает стороны R_1T_1 и R_2T_2 квадратов K_1 и K_2 в некоторых точках U и V.

Заметим, что

$$AU + VC \leqslant AC = a\sqrt{2};$$

докажем, что

$$m = R_1T_1 \leqslant \frac{AU\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad n = R_2T_2 \leqslant \frac{CV\sqrt{2}}{2};$$

отсюда и будет следовать требуемое неравенство

$$m + n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(AU + CV) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} AC = a.$$

В самом деле, пусть прямая R_1T_1 пересекает прямые AB и AD в точках E и F; положим $\angle FEA = \alpha$ (тогда $\angle EFA = \beta = 90° - \alpha$). Из рассмотрения прямоугольных треугольников P_1T_1E и Q_1R_1F с острыми углами α и β и одним катетом длины m, получаем

$$EF = R_1T_1 + T_1E + R_1F = m + m \operatorname{tg}\alpha + m \operatorname{ctg}\alpha =$$
$$= m(1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = m\frac{1 + \sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

С другой стороны, применяя теорему синусов к треугольникам AUE и AUF, у которых $\angle UAE = \angle UAF = 45°$, $\angle AEU = \alpha$, $\angle AFU = \beta = 90° - \alpha$, имеем

$$UE = AU\frac{\sin 45°}{\sin\alpha},\quad UF = AU\frac{\sin 45°}{\sin\beta} = AU\frac{\sin 45°}{\cos\alpha},$$

и значит,

$$EF = AU\sin 45°\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right) = AU\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Таким образом, получаем

$$AU\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = m\frac{1+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Но $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant 1 + \sin\alpha\cos\alpha$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$, поскольку

$$(1+\sin\alpha\cos\alpha) - (\sin\alpha + \cos\alpha) = 1 - \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= (1-\sin\alpha)(1-\cos\alpha) \geqslant 0$$

поэтому

$$AU\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant m.$$

Точно так же доказывается и неравенство

$$CV\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant n,$$

чем и завершается рассуждение.

56. а) Прежде всего исключим из рассмотрения все те отрезки покрытия, которые сами целиком покрываются одним или несколькими из этих отрезков. После этого занумеруем все оставшиеся отрезки в определенном порядке следующим образом. Будем считать, что наш исходный отрезок O длины 1 расположен горизонтально. Назовем первым тот из оставшихся отрезков покрытия, который покрывает левый конец отрезка O (отметим, что такой отрезок может быть только *один*, так как если бы их было два, то тот из них, правый конец которого левее, можно отбросить). Далее назовем вторым тот из отрезков покрытия, который содержит правый конец первого отрезка. Мы утверждаем, что такой отрезок может быть тоже только *один*. Действительно, пусть таких отрезков два: O_1 и O_2, и пусть левый конец O_1 расположен левее левого конца O_2. При этом, если правый конец O_1 расположен правее правого конца O_2, то отрезок O_2 целиком содержится внутри O_1 (и поэтому был нами раньше исключен из рассмотрения); если же правый конец O_1 расположен левее правого конца O_2, то отрезок O_1 целиком покрывается отрезком O_2 и первым отрезком (сделайте соответствующие чертежи!).

Точно так же существует *единственный* отрезок, покрывающий правый конец второго отрезка; назовем этот отрезок третьим, и т. д. Отметим при этом, что *никакие два отрезка, имеющие оба четные или оба нечетные номера, не пересекаются*: в самом деле, если бы, например, первый и третий отрезки пересекались, то они

покрывали бы целиком второй отрезок, чего, по предположению, не может быть. Далее общая длина всех оставшихся отрезков покрытия заведомо не меньше 1 (длины отрезка O). Отсюда следует, что или общая длина всех «нечетных» отрезков не меньше $\frac{1}{2}$, или общая длина всех «четных» отрезков не меньше $\frac{1}{2}$. А это и показывает, что существуют непересекающиеся отрезки покрытия, общая длина которых не меньше $\frac{1}{2}$.

Пример отрезка O, покрытого «в шахматном порядке» четным числом «белых» и «черных» (или «четных» и «нечетных») отрезков одинаковой длины, лишь соприкасающихся своими концами (или перекрывающихся по сколь угодно малым частям), показывает, что полученную в этой задаче оценку *нельзя улучшить*.

б) Выберем самый большой из квадратов покрытия (обозначим его K_1) и отбросим все пересекающиеся с ним (не превосходящие его размерами) квадраты; ясно, что если площадь квадрата K_1 равнялась k_1^2, то не покрытая K_1 площадь, покрываемая отброшенными квадратами, будет $\leqslant 8k_1^2$ (ибо она представляет собой окружающую контур K_1 «полоску» ширины $\leqslant k_1$). Затем выберем самый большой из оставшихся квадратов и снова отбросим все квадраты, пересекающиеся с рвссматриваемым квадратом K_2. Продолжая поступать таким же образом, мы выделим систему неперекрывающихся квадратов, общая площадь которых не меньше восьмикратной площади отброшенных квадратов — откуда и вытекает утверждение задачи.

Примечание. Предложенный в решении задачи б) метод может быть использован и в («одномерной») задаче а), где также возможно начать с наибольшего из покрывающих рассматриваемый отрезок O меньших отрезков O_i; затем, отбросив все пересекающие отобранный отрезок O_1 отрезки покрытия, взять наибольший из оставшихся, и т. д. При этом мы получим системы неперекрывающихся отрезков общей длины $\geqslant\frac{1}{3}$. Однако, в то время как в задаче а) полученная таким путем оценка легко может быть усилена и доведена до наилучшего возможного результата, в случае задачи б) ситуация оказывается совсем иной (ср. со сказанным на стр. 45—47).

57. а) Рассмотрим выпуклую оболочку M наших n точек, т. е. *наименьший выпуклый многоугольник, содержащий внутри и на границе все наши точки* (ср. с началом решения задачи 25). Пусть M есть выпуклый k-угольник $A_1A_2A_3\ldots A_k$, внутри которого лежат оставшиеся $n-k$ точек (где $n \geqslant 102$). Если $n > k$, то выберем одну (произвольную) из внутренних точек (обозначим ее через A_{k+1}) и соединим отрезками со всеми вершинами M, разбив тем самым M на треугольники. Далее, если еще одна точка A_{k+2}, не являющаяся вершиной M и отличная от A_{k+1}, принадлежит треугольнику с вершинами A_i, A_j и A_l, то мы соединим ее с этими тремя точками, разбив тем самым $\triangle A_iA_jA_l$ на три меньших треугольника; затем точно так же поступим с точкой A_{k+3}, и т. д. — до последней точки A_n. Если же

$n = k$, то мы разобьем M на треугольники диагоналями, проходящими через какую-то одну вершину A_1 этого n-угольника.

Итак, во всех случаях мы можем *разбить M на некоторое число t треугольников с вершинами в наших точках.* Оценим число t. Сумма углов всех t треугольников разбиения равна $t \cdot 180°$; с другой стороны, она равна сумме $(k-2) \cdot 180°$ углов k-угольника M, увеличенной на число $(n-k) \cdot 360°$ — на сумму всех «внутренних» углов нашего разбиения. Итак

$$t \cdot 180° = (k-2)\,180° + (n-k) \cdot 360°,$$

откуда

$$t = 2n - k - 2.$$

Таким образом, число t треугольников имеет наименьшее значение, равное $n-2$ в случае $k = n$, т. е. в случае, когда в с е наши точки принадлежат границе выпуклой оболочки M. А так как по условию $n \geqslant 102$, то $t \geqslant 100$. Но поскольку площадь многоугольника M, разбитого на наши t треугольников, заведомо < 1 (ибо M заключается в квадрате площади 1), площадь по крайней мере одного из рассматриваемых треугольников $< 0{,}01$.

б) Спроектируем наши n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (где $n \geqslant 102$) на какую-то, скажем горизонтальную, сторону AB содержащего все эти точки квадрата K. Разобьем AB на 100 неперекрывающихся отрезков длины 0,01; тогда хоть на одном из отрезков разместятся не меньше трех проекций точек $A_1, \ldots, A_n$ [1]). Поэтому какие-то три из наших точек — назовем их A_i, A_j и A_k — попадут в одну «полосу» P ширины 0,01 и площади 0,01, проектирующуюся на AB в рассматриваемый отрезок. А отсюда в силу результата задачи 61 б) следует, что

$$S_{A_iA_jA_k} \leqslant \frac{1}{2}\,0{,}01 = 0{,}005.$$

58. Пусть *площади всех попарных пересечений рассматриваемых многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_9$ м е н ь ш е $\frac{1}{9}$*; тогда площадь части многоугольника M_2, не покрытой многоугольником M_1, больше $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; площадь части многоугольника M_3, не покрытой ни многоугольником M_1, ни многоугольником M_2, больше $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$; площадь части многоугольника M_3, не покрытой ни многоугольником M_1, ни многоугольником M_2, ни многоугольником M_3, больше $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$; ...; площадь части многоугольника M_9, не покрытой ни одним из многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_8$, больше $1 - \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{9}}_{8 \text{ раз}} = \frac{1}{9}$.

[1]) Если бы число точек равнялось 101, то они могли бы совпасть с концами AB и с (99) точками деления AB; однако при $n > 101$ сформулированное утверждение бесспорно имеет место (почему?).

Поэтому площадь объединения многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_9$ в этом случае должна быть больше чем

$$1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\frac{6}{9}+\ldots+\frac{1}{9}=5,$$

что, однако, противоречит предположению о расположении всех многоугольников внутри прямоугольника площади 5.

Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

59. а) Мы используем в решении введенные на стр. 51 обозначения; другими словами, кафтан площади 1 мы обозначим через M, а заплаты — через M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5, причем те же символы M и M_i (где $i = 1, 2, 3, 4$ или 5) обозначают также и числа — площади кафтана $(=1)$ и заплат; далее, скажем, как пересечение заплат M_1 и M_2, так и площадь этого пересечения, мы обозначим через M_{12}, и т. д. Заметим прежде всего, что из неравенства

$$M_1+M_2+M_3+M_4+M_5 \geqslant 5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}>1$$

следует, что наши заплаты неизбежно *пересекаются*; задача состоит в том, чтобы оценить наибольшую площадь пересечения двух заплат.

Мы утверждаем, что

$$M-(M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)+ \\ +(M_{12}+M_{13}+M_{14}+\ldots+M_{45})\geqslant 0 \quad (1)$$

(где, как мы знаем, $M=1$). В самом деле, разность $M-(M_1+M_2+\ldots+M_5)$ была бы не отрицательна, если бы заплаты попарно не пересекались: тогда она была бы равна площади той части кафтана M, которую не покрывает ни одна заплата. Однако наши заплаты пересекаются, и в силу этого сумма $M_1+M_2+\ldots+M_5$ оказывается гораздо больше покрытой заплатами части S кафтана M (не превосходящей, разумеется, $M=1$!): дело в том, что, скажем, общая часть M_{12} заплат M_1 и M_2 учитывается в этой сумме *дважды*, поскольку она входит и в слагаемое M_1, и в слагаемое M_2. Именно для того, чтобы устранить этот недостаток, мы оцениваем величину S (неявно фигурирующим в (1)!) выражением

$$s=(M_1+\ldots+M_5)-(M_{12}+\ldots+M_{45}).$$

На самом деле имеет место даже неравенство $s \leqslant S$: в самом деле, часть кафтана, покрытая сразу тремя заплатами, (скажем, часть M_{123}) вовсе не учитывается в s (поскольку она со знаком $+$ входит в слагаемые M_1, M_2, M_3 и с обратным знаком — в члены $-M_{12}$, $-M_{13}$, $-M_{23}$ выражения s); однако неравенство $s<S$ нам даже выгодно и уже во всяком случае не лишает силы дальнейшие рассуждения. Теперь мы можем написать

$$M-(M_1+M_2+\ldots+M_5)+(M_{12}+M_{13}+\ldots+M_{45})= \\ =M-s\geqslant M-S\geqslant 0,$$

откуда получаем

$$M_{12}+M_{13}+\ \dots\ +M_{45}\geqslant(M_1+M_2+\ \dots\ +M_5)-M\geqslant$$
$$\geqslant 5\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2},$$

и значит (поскольку общее число «попарных пересечений заплат» M_{ij} равно $C_n^2=10$), хоть одно из чисел $M_{12}, \dots, M_{45}$ будет не меньше чем

$$\frac{3}{2}:10=\frac{3}{20}.$$

Полученная нами оценка, однако, хуже требуемой условием задачи оценки $\frac{1}{5}\left(=\frac{4}{20}\right)$; поэтому приведенные рассуждения надо уточнить. Вместо использованной выше «укороченной» формулы

$$M-\sum_i M_i+\sum_{ij} M_{ij}\geqslant 0,\qquad i, j=1, 2, \dots, 5, \qquad (1)$$

где $\sum\limits_i M_i=M_1+M_2+\dots+M_5$, $\sum M_{ij}=M_{12}+M_{13}+\dots+M_{45}$, мы привлечем «полную» формулу

$$M-\sum M_i+\sum M_{ij}-\sum M_{ijk}+\sum M_{ijkl}-M_{12345}\geqslant 0. \qquad (2)$$

Формула (2) следует из того, что

$$S=\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}-\sum M_{ijkl}+M_{12345}, \qquad (3)$$

откуда уже вытекает, что стоящее в левой части (2) выражение равно $M-S\geqslant 0$. В самом деле, мы уже видели, что величина $s=\sum M_i-\sum M_{ij}$ может не равняться S, поскольку в ней вовсе не учитываются участки M_{ijk} кафтана, покрытые сразу т р е м я заплатами M_i, M_j и M_k. Поэтому более точное выражение для S дает сумма $\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}$, также, однако, еще не обязанная совпадать с S, поскольку здесь учитывается *дважды* каждая часть M_{ijkl}, покрытая сразу ч е т ы р ь м я заплатами (так, часть M_{1234} кафтана в последнем выражении учитывается со знаком + в восьми слагаемых: M_1, M_2, M_3, M_4; M_{123}, M_{124}, M_{134}, M_{234}; с обратным же знаком она фигурирует только в шести членах: $-M_{12}$, $-M_{13}$, $-M_{14}$, $-M_{23}$, $-M_{24}$ и $-M_{34}$).

Таким образом, мы приходим к выражению

$$\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}-\sum M_{ijkl},$$

которое уже «почти равно» S: единственным источником ошибки здесь может явиться то, что общая часть M_{12345} всех п я т и заплат полностью *выпадает* из нашей (алгебраической) суммы, участвуя во всех без исключения ее слагаемых — как положительных (их число равно $5+10=15$), так и отрицательных (их число равно $10+5$, т. е. снова 15). Учтя это обстоятельство, мы придем к соотношению (3), обеспечивающему справедливость неравенства (2).

Точно те же рассуждения, примененные к куску M_1 кафтана, покрытому «заплатами» M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15}, приводят к неравенству

$$M_1 - \sum_i M_{1i} + \sum_{i,j} M_{1ij} - \sum M_{1ijk} + M_{12345} \geqslant 0, \quad i, j, k = 2, 3, 4, 5.$$

Такие же неравенства можно записать и для кусков $M_2, \ldots, M_5$ кафтана:

$$M_2 - \sum M_{2i} + \sum M_{2ij} - \sum M_{2ijk} + M_{12345} \geqslant 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_5 - \sum M_{5i} + \sum M_{5ij} - \sum M_{5ijk} + M_{12345} \geqslant 0.$$

Просуммировав все эти соотношения, отвечающие областям M_1, $M_2, \ldots, M_5$, получим (проверьте это!)

$$\sum M_i - 2\sum M_{ij} + 3\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 5M_{12345} \geqslant 0. \quad (4)$$

Прибавив теперь к (2) умноженное на $\frac{1}{3}$ неравенство (4), мы придем к неравенству, в котором вовсе *отсутствует сумма* $\sum M_{ijk}$:

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} - \frac{1}{3}\sum M_{ijkl} + \frac{2}{3} M_{12345} \geqslant 0. \quad (5)$$

Из (5) также следует

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} \geqslant 0 \quad (6)$$

(заметим, что часть M_{12345} кафтана M входит в каждую из пяти его частей M_{ijkl}, в силу чего $\sum M_{ijkl} \geqslant 5M_{12345}$ и $-\frac{1}{3}\sum M_{ijkl} + \frac{2}{3} M_{12345} \leqslant 0$).

Теперь мы уже находимся у самого конца решения задачи. Из (6) получаем

$$\sum M_{ij} \geqslant 2\sum M_i - 3M \geqslant 2\left(5 \cdot \frac{1}{2}\right) - 3 = 2;$$

отсюда, поскольку общее число областей M_{ij} равно 10, следует, что хоть одна из них не меньше чем

$$2 : 10 = \frac{1}{5}.$$

Нетрудно видеть, что равенство здесь будет иметь место лишь тогда, когда $S = M$ (т. е. когда *весь* кафтан покрыт заплатами), все $M_i = \frac{1}{2}$, все M_{ik} одинаковы $\left(\text{и равны } \frac{1}{5} = \frac{4}{20}\right)$ и все

$M_{ijkl}=0$. Эти соображения позволяют построить пример, показывающий, что полученную оценку *улучшить нельзя* (см. рис. 116, где цифры на квадратиках, на которые разбит прямоугольник M, играющий роль «кафтана», показывают, каким из заплат с номерами от 1 до 5 этот квадратик принадлежит; напоминаем, что заплаты могут состоять и из нескольких отдельных частей).

12	13	14	15	23
24	25	34	35	45
123	124	125	134	135
145	234	235	245	345

Рис. 116.

б) Решение этой задачи во всем аналогично решению задачи а). Воспользуемся теми же неравенствами (2) и (4), что и раньше; только теперь, прибавив к (2) неравенство (4), умноженное на $\frac{1}{2}$, мы получим следующее неравенство, из которого *выпадает* не интересующий нас здесь *член* $\sum M_{ij}$:

$$M-\frac{1}{2}\sum M_i+\frac{1}{2}\sum M_{ijk}-\sum M_{ijkl}+\frac{3}{2}M_{12345}\geqslant 0. \qquad (7)$$

Из (7) следует, что тем более

$$M-\frac{1}{2}\sum M_i+\frac{1}{2}\sum M_{ijk}\geqslant 0 \qquad (8)$$

(почему?) и, значит,

$$\frac{1}{2}\sum M_{ijk}\geqslant\frac{1}{2}\sum M_i-M\geqslant\frac{1}{2}\left(5\cdot\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{4},$$

т. е.

$$\max M_{ijk}\geqslant\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{2}\cdot 10\right)=\frac{1}{20}$$

(общее число «тройных пересечений заплат» M_{ijk} также равно 10, поскольку $C_5^3=10$). При этом равенство здесь выполняется при тех же условиях, что и в задаче а) (см. тот же рис. 116).

в) Эта задача очень близка к предыдущим. Сложим те же неравенства (2) и (4), которые использовались в решении задач а) — б); при этом мы получим следующее неравенство, из которого *выпадает* вовсе нас теперь не интересующий *член* $\sum M_i$:

$$M-\sum M_{ij}+2\sum M_{ijk}-3\sum M_{ijkl}+4M_{12345}\geqslant 0. \qquad (9)$$

Из (9) следует, что тем более

$$M-\sum M_{ij}+2\sum M_{ijk}\geqslant 0 \qquad (10)$$

(почему?) и, значит,

$$2\sum M_{ijk}\geqslant\sum M_{ij}-M\geqslant 10\cdot\frac{1}{4}-1=\frac{3}{2}.$$

Поэтому

$$\max M_{ijk} \geqslant \frac{3}{2} : (2 \cdot 10) = \frac{3}{40}.$$

Случай равенства здесь указывает рис. 117 (на нем прямоугольники, на которые разбивается правая часть «кафтана», в три раза больше квадратиков, на которые разбита его левая часть).

Рис. 117.

60. Пункты а) — в) этой задачи являются обобщением пп. а) — в) задачи 59, — и в решении задачи 60 можно воспользоваться теми же идеями, что и в решении задачи 59. Для того чтобы облегчить понимание решения, уместно, однако, сначала (как это и рекомендовано на стр. 49) рассмотреть частный случай $n = 5$.

а) I. Разумеется $f_5(\alpha) \geqslant 0$, т. е. график функции $y = f_5(\alpha)$ расположен в верхней полуплоскости (рис. 118, *а*). Далее из неравенства (1) решения задачи 59 (стр. 207) следует, что если

$$\text{все} \quad M_{ij} = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad y = f_5(\alpha) = \max M_{ij} = 0, \tag{I}$$

то

$$1 - 5\alpha \geqslant M - \sum M_i \geqslant 0, \qquad \text{т. е.} \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{5} \tag{Ia}$$

(это, впрочем, очевидно).

II. Из того же неравенства (1) также вытекает, что

$$\sum M_{ij} \geqslant \sum M_i - M \geqslant 5\alpha - 1,$$

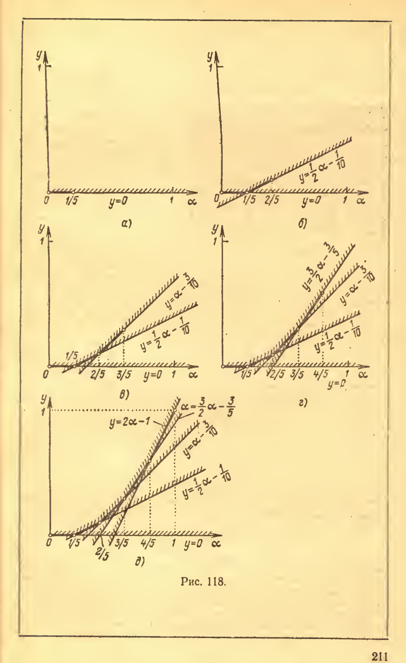
и значит,

$$y = f_5(\alpha) = \max M_{ij} \geqslant \frac{5\alpha - 1}{10} \tag{II}$$

(рис. 118, *б*; напомним, что общее число пересечений M_{ij} равно $C_5^2 = 10$). *Неравенство* (II) имеет место всегда, но *равенство* в нем, означающее, что

$$y = f_5(\alpha) = \frac{5\alpha - 1}{10} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}, \tag{IIa}$$

возможно, лишь если (1) обращается в равенство и, значит, все $M_{ijk} = 0$ (и $S = M$) и если все $M_i = \alpha$. Но это означает, что, скажем, «пересечения» M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15} покрывают многоугольник M_1 без перекрытий; другими словами, что выполняются аналогичные (I) равенства, в которых речь идет о «заплатах» M_{1i} на «кафтане» M_1, а следовательно, что имеют место и аналогичные (Ia) неравенства, оценивающие отношение площади «заплаты» M_{1i}



y
1
0
1/5
y=0
1
α
а)
$y=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{10}$
2/5
б)
$y=\alpha-\frac{3}{10}$
3/5
в)
$y=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{5}$
4/5
г)
$y=2\alpha-1$
д)

Рис. 118.

к площади $M_1 = \alpha$ «кафтана», где только теперь число заплат равно уже не 5, а 4 и площадь заплаты равна не $M_i = \alpha$, а $M_{1i} = \frac{5\alpha - 1}{10}$. Эти соображения дают

$$0 \leqslant \frac{5\alpha - 1}{10} : \alpha \leqslant \frac{1}{4}, \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{5}. \qquad \text{(IIб)}$$

III. Следующий шаг в точности аналогичен решению задачи 59 а). В силу неравенства (6) (представляющего собой «укороченное» неравенство (5), полученное комбинированием (2) и (4), причем таким, что из (6) выпал член с $\sum M_{ijk}$) имеем (рис. 118, в)

$$\sum M_{ij} \geqslant 2 \sum M_i - 3M \geqslant 10\alpha - 3,$$

и значит,

$$y = f_5(\alpha) = \max M_{ij} \geqslant \frac{10\alpha - 3}{10}. \qquad \text{(III)}$$

Неравенство (III) выполняется при в с е х α; однако *равенство* в нем, означающее, что

$$y = f_5(\alpha) = \frac{10\alpha - 3}{10} = \alpha - \frac{3}{10}, \qquad \text{(IIIa)}$$

может иметь место, если все $M_i = \alpha$, и $\sum M_{ijkl} = 0$, т. е. заплаты M_i перекрываются не более чем по три (по три они перекрываться могут, ибо член $\sum M_{ijk}$ в (6) отсутствует). При этом пересечения M_{ij} могут между собой перекрываться не более чем по два; но если M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15} покрывают M_1, перекрываясь не более чем п о д в а, то имеют место аналогичные (II б) неравенства, где только теперь «кафтан» имеет не площадь $M = 1$, а площадь $M_1 = \alpha$ (так что рассматриваемый вариант (II б) оценивает отношение площади «заплаты на M_1» к $M_1 = \alpha$), «заплаты на кафтане» имеют не площадь $M_i = \alpha$, а площадь $M_{1i} = \frac{10\alpha - 3}{10}$, и число «заплат» уменьшается на одну (т. е. равно не 5, а 4). Таким образом, мы получаем

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{10\alpha - 3}{10} : \alpha \leqslant \frac{2}{4}, \qquad \text{или} \qquad \frac{2}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{5}. \qquad \text{(IIIб)}$$

IV. На следующем этапе анализа ситуации нам придется учитывать уже и «заплаты на M_{ij}». В применении к M_{12} (покрытому «заплатами» M_{12i}) неравенство типа (2) принимает вид

$$M_{12} - \sum_i M_{12i} + \sum_{ij} M_{12ij} - M_{12345} \geqslant 0, \qquad i, j = 3, 4, 5. \qquad \text{(IV)}$$

Выписав подобные неравенства, составленные для всех $C_5^2 = 10$ пересечений заплат M_{ij}, и сложив их, получим

$$\sum M_{ij} - 3 \sum M_{ijk} + 6 \sum M_{ijkl} - 10M_{12345} \geqslant 0. \qquad \text{(IVa)}$$

Из трех неравенств: (2), (4) и (IVa) можно составить такую их комбинацию, которая *не содержит ни члена с* $\sum M_{ijk}$, *ни члена с* $\sum M_{ijkl}$: в самом деле, сложив (2), (4), умноженное на $\frac{1}{2}$, и (IVa), умноженное на $\frac{1}{6}$, мы придем к неравенству

$$M-\frac{1}{2}\sum M_i+\frac{1}{6}\sum M_{ij}-\frac{1}{6}M_{12345}\geqslant 0. \qquad \text{(IVб)}$$

Из (IVб) следует также справедливость «укороченного» неравенства

$$M-\frac{1}{2}\sum M_i+\frac{1}{6}\sum M_{ij}\geqslant 0. \qquad \text{(IVв)}$$

Таким образом, *имеет место неравенство* (рис. 118, *г*) $\sum M_{ij}\geqslant 3\sum M_i-6M=15\alpha-6$ и, значит,

$$y=f_5(\alpha)=\max M_{ij}\geqslant\frac{15\alpha-6}{10}. \qquad \text{(IVг)}$$

При этом, для того чтобы (IVг) обращалось в *равенство*, т. е. чтобы было

$$y=f_5(\alpha)=\frac{15\alpha-6}{10}=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{5}, \qquad \text{(IVд)}$$

надо, чтобы выполнялись равенства $M_i=\alpha$, $M_{ij}=\frac{15\alpha-6}{10}$ и чтобы было $M_{12345}=0$. Но если $M_{12345}=0$, то пересечения M_{1i} покрывают M_1, пересекаясь не более чем трехкратно, и значит, в применении к M_1 мы находимся в выражаемом неравенствами (IIIб) положении, только в (IIIб) теперь надо заменить $M=1$ на $M_1=\alpha$ (т. е. оценивать отношение «площадей заплат» M_{1i} к «площади кафтана» $M_1=\alpha$), $M_i=\alpha$ заменить на $M_{1i}=\frac{15\alpha-6}{10}$ и число заплат считать равным 4:

$$\frac{2}{4}\leqslant\frac{15\alpha-6}{10}:\alpha\leqslant\frac{3}{4}, \qquad \text{т. е.} \qquad \frac{3}{5}\leqslant\alpha\leqslant\frac{4}{5}. \qquad \text{(IVe)}$$

V. Нам осталось только определить значения, принимаемые функцией $y=f_5(\alpha)$ при $\alpha>\frac{4}{5}$. Для этого мы выпишем неравенство типа (2), составленное для тройного пересечения M_{123} заплат:

$$M_{123}-\sum_i M_{123i}+M_{12345}\geqslant 0, \qquad \text{где} \qquad i=4,\ 5. \qquad \text{(V)}$$

Просуммировав 10 подобных неравенств, отвечающих $C_5^3=10$ многоугольникам M_{ijk}, получим

$$\sum M_{ijk}-4M_{ijkl}+10M_{12345}\geqslant 0. \qquad \text{(Va)}$$

Таким образом, мы теперь имеем уже четыре неравенства (2), (4), (IVа) и (Vа), связывающие шесть величин M, $\sum M_i$, $\sum M_{ij}$, $\sum M_{ijk}$, $\sum M_{ijkl}$ и M_{12345}; поэтому можно подобрать такую их комбинацию, из которой *выпадут члены с* $\sum M_{ijk}$, *с* $\sum M_{ijkl}$ *и с* M_{12345}. Для этого мы сложим (2); (4), умноженное на $\frac{3}{5}$; (IVа), умноженное на $\frac{3}{10}$; (Vа), умноженное на $\frac{1}{10}$, — и получим

$$M-\frac{2}{5}\sum M_i+\frac{1}{10}\sum M_{ij}\geqslant 0. \qquad \text{(Vб)}$$

Отсюда следует (рис. 118, *д*)

$$\sum M_{ij}\geqslant 4\sum M_i-10M\geqslant 20\alpha-10, \quad \text{и значит,}$$

$$y=f_5(\alpha)=\max M_{ij}\geqslant\frac{20\alpha-10}{10}. \qquad \text{(Vв)}$$

При этом, для того чтобы в (Vв) имело место *равенство*, т. е. чтобы было

$$y=f_5(\alpha)=\frac{20\alpha-10}{10}=2\alpha-1, \qquad \text{(Vг)}$$

необходимо (и достаточно), чтобы выполнялись неравенства типа (IVе), где $M=1$ заменено на $M_1=\alpha$; $M_i=\alpha$ заменено на $M_{1i}=2\alpha-1$; 4 заменено на 5:

$$\frac{3}{4}\leqslant(2\alpha-1):\alpha\leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{4}{5}\leqslant\alpha\leqslant 1. \qquad \text{(Vд)}$$

Окончательно мы приходим к выписанным на стр. 52 (и изображенным на рис. 17) значениям функции $y=f_5(\alpha)$.

б), в) Совершенно аналогично можно найти и все значения функций $f_5^{(k)}(\alpha)$ и $f_5^{(h,k)}(\alpha)$, определение которых требуется задачами 60 б), в); мы остановимся здесь лишь на (выписанной на стр. 52 и изображенной на рис. 18) функции $f_5^{(3)}(\alpha)$, предоставив читателю самостоятельно найти точные значения всех других рассматриваемых функций. При этом основную роль по-прежнему будут играть те же неравенства (2), (4), (IVа) и (Vа) — и «техника» работы сводится к разумному комбинированию этих неравенств.

В решении задачи 59 б) мы уже имели неравенство (7), из которого выпал (более нам ненужный) член с $\sum M_{ij}$, а также «укороченное» неравенство

$$M-\frac{1}{2}\sum M_i+\frac{1}{2}\sum M_{ijk}\geqslant 0, \qquad (8)$$

полученное из (7). Из (8) получаем

$$\sum M_{ijk} \geqslant \sum M_i - 2M \geqslant 5\alpha - 2,$$

т. е.

$$f_5^{(3)}(\alpha) = \max M_{ijk} \geqslant \frac{5\alpha - 2}{10}$$

(напомним, что общее число тройных пересечений заплат M_{ijk} равно C_5^3, т. е. также равно 10). При этом *равенство*

$$f_5^{(3)}(\alpha) = \frac{5\alpha - 2}{10} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{5}$$

имеет место, если заплаты M_i перекрываются не более чем т р е х к р а т н о, т. е. если

$$\frac{2}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{5}$$

(см. выше (IIIб), полученное точно в таких же предположениях).

Для того чтобы найти значения функции $f_5^{(3)}(\alpha)$ в следующем интервале значений α, т. е. при $\frac{3}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}$, сложим (2), умноженное на $\frac{5}{8}$ неравенство (4) и умноженное на $\frac{1}{4}$ неравенство (IVа); мы получим неравенство

$$M - \frac{3}{8}\sum M_i + \frac{1}{8}\sum M_{ijk} - \frac{3}{8} M_{12345} \geqslant 0,$$

из которого выпал не только член с $\sum M_{ij}$, но и член с $\sum M_{ijkl}$. Нам будет нужен «укороченный вариант» этого последнего неравенства:

$$M - \frac{3}{8}\sum M_i + \frac{1}{8}\sum M_{ijk} \geqslant 0,$$

из которого следует, что

$$\sum M_{ijk} \geqslant 3\sum M_i - 8M \geqslant 15\alpha - 8,$$

и значит,

$$f_5^{(3)}(\alpha) = \max M_{ijk} \geqslant \frac{15\alpha - 8}{10}.$$

При этом, для того чтобы было

$$f_5^{(3)}(\alpha) = \frac{15\alpha - 8}{10} = \frac{3}{2}\alpha - \frac{4}{5},$$

необходимо, чтобы многоугольники M_i пересекались не более чем ч е т ы р е х к р а т н о, т. е. чтобы было

$$\frac{3}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{4}{5}.$$

Наконец, сложив неравенство (2), умноженное на $\frac{7}{10}$ неравенство (4), умноженное на $\frac{2}{5}$ неравенство (IVa) и умноженное на $\frac{3}{20}$ неравенство (Va), мы придем к такой комбинации наших неравенств, в которой отсутствует не только член с $\sum M_{ij}$ (этот член надо исключать каждый раз, когда нас интересует оценка для $\max M_{ijk}$), но также и члены с $\sum M_{ijkl}$ и с M_{12345}:

$$M - \frac{3}{10} \sum M_i + \frac{1}{20} \sum M_{ijk} \geqslant 0.$$

Из этого последнего неравенства получаем

$$\sum M_{ijk} \geqslant 6 \sum M_i - 20M \geqslant 30\alpha - 20,$$

т. е.

$$f_5^{(3)}(\alpha) = \max M_{ijk} = \frac{30\alpha - 20}{10} = 3\alpha - 2.$$

При этом равенство

$$f_5^{(3)}(\alpha) = 3\alpha - 2,$$

очевидно, имеет место лишь при

$$\frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

После этого относящегося к случаю $n = 5$ «Введения» мы можем перейти к решению (общих) задач а) — в), которые будем разбирать последовательно, хотя, конечно, задача а) составляет частный случай задачи б), а задачи а) и б) — частный случай задачи в).

а) Первое решение. Мы будем исходить из аналогичного неравенству (2) (стр. 207) и легко доказываемого, например, методом математической индукции неравенства [1])

$$M - \sum_i M_i + \sum_{i_1, i_2} M_{i_1 i_2} - \sum_{i_1, i_2, i_3} M_{i_1 i_2 i_3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r} M_{i_1 i_2 \ldots i_r} + \ldots + (-1)^n M_{12\ldots n} \geqslant 0,$$
$$i_1, i_2, \ldots = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

[1]) См., например, Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. 2, М., Гостехиздат, 1956, задача 21 отд. VIII; Н. Я. Виленкин, Комбинаторика, М., «Наука», 1969, стр. 25; ср. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954, решение задачи 78 а) и многих

(нумерация формул независима от решения задачи 59; обозначения аналогичны употреблявшимся ранее). Выпишем также неравенства типа (1) для каждого из n многоугольников (заплат) $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_n$ и сложим их; мы получим

$$\sum M_i - 2\sum M_{i_1i_2} + 3\sum M_{i_1i_2i_3} - 4\sum M_{i_1i_2i_3i_4} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{r-1} r \sum M_{i_1i_2\ldots i_r} + \ldots + (-1)^{n-1} nM_{12\ldots n} \geqslant 0 \quad (2)$$

(ср. с неравенством (4) на стр. 208). Затем выпишем неравенство типа (1) для всех $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ «двойных пересечений» $M_{i_1i_2}$ многоугольников и сложим их; мы будем иметь

$$\sum M_{i_1i_2} - 3\sum M_{i_1i_2i_3} + 6\sum M_{i_1i_2i_3i_4} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{r-2} C_r^2 \sum M_{i_1i_2\ldots i_r} + \ldots + (-1)^{n-2} C_n^2 M_{12\ldots n} \geqslant 0. \quad (3)$$

Точно так же, применяя «основное неравенство» (1) ко всем «тройным пересечениям» $M_{i_1i_2i_3}$ и складывая C_n^3 получившихся неравенств; ко всем «четверным пересечениям» $M_{i_1i_2i_3i_4}$ и складывая C_n^4 получившихся неравенств, и т. д., мы получим следующую систему соотношений:

$$\sum M_{i_1i_2i_3} - 4\sum M_{i_1i_2i_3i_4} + \ldots + (-1)^{r-3} C_r^3 \sum M_{i_1i_2\ldots i_r} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-3} C_n^3 M_{12\ldots n} \geqslant 0, \quad (4)$$

$$\sum M_{i_1i_2i_3i_4} + \ldots + (-1)^{r-4} C_r^4 \sum M_{i_1i_2\ldots i_r} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-4} C_n^4 M_{12\ldots n} \geqslant 0, \quad (5)$$

. . . .

Поставим теперь следующую задачу: *найти такие числа* $x_1, x_2,$ $x_3, \ldots,$ *что при сложении неравенств* (1), (2), (3), (4), ..., *взятых с коэффициентами* 1, $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ *из получившегося неравенства выпали бы все члены с* $\sum M_{i_1i_2i_3}$, *с* $\sum M_{i_1i_2i_3i_4}, \ldots,$ *и т. д. вплоть до члена с* $\sum M_{i_1i_2\ldots i_r}$ (для этого нам, очевидно, придется

других; І. І. Ежов, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко, Елементи комбінаторики, Київ, «Вища школа», 1972, стр. 12—13.

[Для доказательства (1) достаточно заметить, что правая часть (1) выражает *часть многоугольника* M, *не покрытую ни одним из многоугольников* M_i. Это обстоятельство очевидно при $n = 1$; далее, вычтя из соответствующего **равенства**, указывающего величину площади части M, не покрытой ни одним из многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$, подобное же равенство, выражающее часть многоугольника M_{n+1}, не покрытую многоугольниками $M_{1,\,n+1}, M_{2,\,n+1}, \ldots, M_{n,\,n+1}$ (снова n многоугольников!), мы докажем (1) для случая $n+1$ многоугольников M_i].

использовать $r-1$ неравенств). При этом мы придем к такой системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -1+3x_1-3x_2+x_3&=0,\\ 1-4x_1+6x_2-4x_3+x_4&=0,\\ -1+5x_1-10x_2+10x_3-5x_4+x_5&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ (-1)^r+(-1)^{r-1}rx_1+(-1)^{r-2}C_r^2x_2+(-1)^{r-3}C_r^3x_3+&\ldots\\ \ldots+C_r^{r-2}x_{r-2}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

или, в более симметричной форме [1]),

$$\left.\begin{aligned} C_3^1x_1-C_3^2x_2+C_3^3x_3&=1,\\ C_4^1x_1-C_4^2x_2+C_4^3x_3-C_4^4x_4&=1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ C_{r-2}^1x_1-C_{r-2}^2x_2+C_{r-2}^3x_3-\ldots+C_{r-2}^{r-2}x_{r-2}&=1,\\ C_{r-1}^1x_1-C_{r-1}^2x_2+C_{r-1}^3x_3-\ldots-C_{r-1}^{r-2}x_{r-2}&=1,\\ C_r^1x_1-C_r^2x_2+C_r^3x_3-\ldots+C_r^{r-2}x_{r-2}&=1. \end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

Решение системы (6а) имеет вид

$$x_1=\frac{(r-1)(r-2)}{r(r-1)}=\frac{r-2}{r},\quad x_2=\frac{(r-2)(r-3)}{r(r-1)},$$
$$x_3=\frac{(r-3)(r-4)}{r(r-1)},\quad \ldots,\quad x_{r-2}=\frac{2\cdot 1}{r(r-1)} \qquad (7)$$

(проверьте, что эти значения неизвестных действительно удовлетворяют нашей системе!). Таким образом, сложив $r-1$ неравенств: (1); неравенство (2), умноженное на $\frac{r-2}{r}$; неравенство (3), умноженное на $\frac{(r-2)(r-3)}{r(r-1)}$; неравенство (4), умноженное на $\frac{(r-3)(r-4)}{r(r-1)}$, и т. д., мы получим

$$M-\frac{2}{r}\sum M_i+\frac{2}{r(r-1)}\sum M_{ij}-A_{r+1}\sum M_{i_1\ldots i_{r+1}}+$$
$$+A_{r+2}\sum M_{i_1,\ldots,i_{r+2}}-\ldots+(-1)^{N-r}A_nM_{12\ldots n}\geqslant 0, \quad (8)$$

[1]) «Матрица» этой системы получается из треугольной матрицы $\|a_{ij}\|$ порядка r, где

$$a_{ij}=\begin{cases} C_i^j & \text{при } i\geqslant j,\\ 0 & \text{при } i<j, \end{cases} \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

отбрасыванием первых двух строк и последних двух столбцов.

где коэффициенты $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_n$ нетрудно выписать (что, впрочем, нам не будет нужно).

Из неравенства (8) также следует «укороченное» неравенство

$$M - \frac{2}{r}\sum M_i + \frac{2}{r(r-1)}\sum M_{ij} \geqslant 0 \tag{8a}$$

(почему?), и значит,

$$\sum M_{ij} \geqslant (r-1)\sum M_i - \frac{r(r-1)}{2} M \geqslant (r-1)\,n\alpha - \frac{r(r-1)}{2},$$

т. е.

$$\max_{(i,\,j)} M_{ij} \geqslant \frac{1}{C_n^2}\left[(r-1)\,n\alpha - \frac{r(r-1)}{2}\right] = 2\,\frac{r-1}{n-1}\,\alpha - \frac{r(r-1)}{n(n-1)}. \quad \text{(A)}$$

При этом равенство в (A) может иметь место, лишь если для всех $k < r$ при любых комбинациях индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n$ имеем $M_{i_1 \ldots i_k} = 0$, т. е. если многоугольники M_i пересекаются не более чем по r. Но нетрудно при помощи метода математической индукции показать, что последнее возможно, лишь если $\alpha \leqslant \frac{r}{n}$.

Таким образом, окончательно получаем

$$f_n(\alpha) = 2\,\frac{r-1}{n-1}\,\alpha - \frac{r(r-1)}{n(n-1)} \quad \text{при} \quad \frac{r-1}{n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{r}{n},$$

$$r = 1, 2, \ldots, n, \qquad (*)$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. В основе иного решения задач а) — в) в известном смысле лежат рис. 116 и 117 (стр. 209 и 210), изображающие оптимальные в смысле наших задач а) — в) разбиения многоугольника M на части M_i. Наша задача будет состоять как раз в отыскании этих оптимальных разбиений квадрата M.

Условимся сопоставлять каждой системе $\mathfrak{R}$ покрывающих квадрат M многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$ систему из $n+1$ неотрицательных чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, где x_k — *площадь части квадрата M, покрытой многоугольниками нашей системы в точности k-кратно* (здесь $k = 0, 1, \ldots, n$; число x_0 указывает площадь части квадрата M, вовсе не покрытой многоугольниками M_i). Совокупность чисел $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ назовем *характеристикой* системы $\mathfrak{R}$ многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Ясно, что для каждой характеристики $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1 \tag{9}$$

(ибо стоящее слева выражение равно общей площади квадрата M) и что если система многоугольников удовлетворяет условиям задачи, то

$$0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + nx_n = n\beta,$$

$$\text{где } \alpha \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{10}$$

ибо стоящее в левой части выражение совпадает с суммой площадей всех многоугольников системы (значит, оно $\geqslant n\alpha$ и $\leqslant n \cdot 1 = n$). Несколько менее очевидно, что *каждая система* $n+1$ *неотрицательных чисел* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющих условиям* (9) *и* (10), *является характеристикой хоть одной системы* $\mathfrak{R}$ *многоугольников* $M_1, M_2, \ldots, M_n$, *площадей* $\geqslant \alpha$ (т. е. таких, что $\min M_i \geqslant \alpha$).

Для доказательства последнего утверждения разобьем квадрат M на $n+1$ частей, площади которых соответственно равны $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (см. (9); некоторые из этих частей могут иметь нулевую площадь, т. е. отсутствовать). j-ю из наших частей (где $j = 0, 1, \ldots, n$) разобьем на C_n^j равных частей (так что площадь каждой части равна $\frac{1}{C_n^j} x_j$); эти части мы будем считать покрытыми всевозможными различными группами по j из наших n многоугольников (так что каждая такая часть оказывается покрытой в точности j многоугольниками [1])). В силу полной симметричности построенной системы многоугольников здесь

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_n,$$

а так как, согласно (10), сумма площадей всех многоугольников равна $n\beta$, то

$$M_i = \beta \geqslant \alpha, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Описанную систему n равных по площади многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$, имеющую характеристику $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, мы назовем *канонической* системой многоугольников, отвечающей данной характеристике. Ясно, что для канонической системы C_n^2 попарных пересечений многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$ будут все равны между собой. А так как общая площадь этих C_n^2 попарных пересечений многоугольников, очевидно, равна

$$x_2 + C_3^2 x_3 + C_4^2 x_4 + \ldots + C_n^2 x_n \tag{11}$$

(поскольку каждая часть M, покрытая многоугольниками системы в точности трехкратно, принадлежит $C_3^2 = 3$ попарным пересечениям многоугольников системы; каждая часть M, покрытая $M_1, M_2, \ldots, M_n$ в точности четырехкратно, принадлежит C_4^2 попарным пересечениям, и т. д.), то в этом случае *все попарные пересечения многоугольников* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *будут равны*

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{C_n^2} x_2 + \frac{C_3^2}{C_n^2} x_3 + \frac{C_4^2}{C_n^2} x_4 + \ldots + \frac{C_n^2}{C_n^2} x_n = \sum_{i \geqslant 2} x_i \frac{C_i^2}{C_n^2}. \tag{12}$$

[1]) Напомним, что условия задачи не исключают случая, когда некоторые из многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$ состоят из нескольких частей.

Докажем прежде всего, что *для систем многоугольников* M_1, M_2, ..., M_n, *отвечающих заданной характеристике* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, *минимум величины* $\max_{i_1, i_2} M_{i_1 i_2}$ *равен* $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (и, следовательно достигается для канонической системы, отвечающей данной характеристике). В самом деле, сумма C_n^2 попарных пересечений $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_{n-1, n}$ многоугольников системы всегда имеет значение (11), — и поэтому наибольшее из этих C_n^2 пересечений никогда не может быть меньше $\frac{1}{C_n^2}$-й части суммы (11), т. е. величины $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь необходимо отыскать такую характеристику $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям (9) и (10), для которой величина $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ является наименьшей. Мы утверждаем, что *для этой характеристики из* $n+1$ *чисел* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *отличны от нуля лишь два каких-то соседних числа* x_l *и* x_{l+1} *или лишь одно число* x_l. В самом деле, предположим, что это не так и что x_l есть первое отличное от нуля из чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а x_m — последнее отличное от нуля из этих чисел, причем $m - l \geqslant 2$; пусть еще для определенности, $x_m \geqslant x_l$. Заменим характеристику $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ новой характеристикой $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, такой, что

$$\begin{aligned} &y_l = x_l - x_l = 0, \quad y_{l+1} = x_{l+1} + x_l, \\ &y_{m-1} = x_{m-1} + x_l, \quad y_m = x_m - x_l, \quad \text{если} \quad m > l+2, \\ &y_l = x_l - x_l = 0, \quad y_{l+1} = x_{l+1} + 2x_l, \\ &\qquad y_{l+2} = x_{l+2} - x_l, \quad \text{если} \quad m = l+2, \end{aligned} \tag{13}$$

а все остальные числа y_i равны соответствующим числам x_i. Ясно, что характеристика $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ также удовлетворяет условиям (9) и (10), поскольку

$$y_0 + y_1 + \ldots + y_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n, \tag{14}$$

$$0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 + \ldots + ny_n = 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + \ldots + nx_n; \tag{15}$$

с другой стороны, для нее разность между номерами первого отличного от нуля числа и последнего отличного от нуля числа на единицу или на два меньше, чем для первоначальной характеристики $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Покажем теперь (пользуясь формулами (12) и (13) и условием $m - l \geqslant 2$), что всегда $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) - f_n(y_0, y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0$. Приведенная на стр. 222 таблица исчерпывает все случаи, которые могут представиться при оценке указанной разности. Таким образом, переход от характеристики $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ к характеристике $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ только уменьшает значение $\max_{i_1, i_2} M_{i_1 i_2}$. Последовательно применяя этот прием столько раз, сколько нам потребуется, мы придем к такой характеристике, в которой *лишь одно или два соседних числа* будут *отличны от нуля*.

m	l	$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) - f_n(y_0, y_1, \ldots, y_n)$
$m=2$	$l=0$	$x_l \dfrac{1}{C_n^2} > 0$
$m>2$	$l=0$	$x_l \dfrac{-C_{m-1}^2 + C_m^2}{C_n^2} = x_l \dfrac{C_{m-1}^1}{C_n^2} > 0$
$m>2$	$l=1$	$x_l \dfrac{-C_2^2 - C_{m-1}^2 + C_m^2}{C_n^2} = x_l \dfrac{C_{m-1}^1 - 1}{C_n^2} > 0$
$m \geqslant l+2$	$l \geqslant 2$	$x_l \dfrac{C_l^2 - C_{l+1}^2 - C_{m-1}^2 + C_m^2}{C_n^2} = x_l \dfrac{C_{m-1}^1 - C_l^1}{C_n^2} > 0$

Но удовлетворяющая этим условиям характеристика *полностью определяется условиями* (9) *и* (10). А именно, при $\frac{r-1}{n} \leqslant \beta \leqslant \frac{r}{n}$ имеем

$$\begin{aligned} x_{r-1} &= r - n\beta, \\ x_r &= n\beta + 1 - r. \end{aligned} \qquad (16)$$

Теперь из формулы (12) находим

$$n\ (0, \ldots, 0, x_{r-1}, x_r, 0, \ldots, 0) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } r < 2, \\ (n\beta + 1 - r)\dfrac{C_r^2}{C_n^2} & \text{при } r = 2, \\ (r - n\beta)\dfrac{C_{r-1}^2}{C_n^2} + (n\beta + 1 - r)\dfrac{C_r^2}{C_n^2} & \text{при } r > 2. \end{cases} \qquad (17)$$

Поскольку мы получили неубывающую функцию от β, а наименьшее возможное значение β равно α, то для того, чтобы найти интересующий нас минимум величины f_n, остается лишь заменить в (17) β на α. Кроме того, можно несколько упростить формулу (17). Итак,

$$\text{если} \quad \frac{r-1}{n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{r}{n}, \quad \text{то} \quad f_n(\alpha) = \frac{r-1}{C_n^2}\left(n\alpha - \frac{r}{2}\right). \qquad (*)$$

б) Задачу б) можно решить аналогично первому или аналогично второму решению задачи а); мы здесь ограничимся решением, копирующим второе решение. В точности, как и выше, здесь тоже

можно ввести понятие *характеристики* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ системы $\mathfrak{R}$ многоугольников $M_1, \ldots, M_n$ (причем по-прежнему удовлетворяются основные условия (9) и (10)), и определить *каноническую* систему многоугольников, отвечающую данной характеристике. Для канонической системы сумма C_n^k площадей k-кратных пересечений $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ многоугольников будет равна

$$x_k + C_{k+1}^k x_{k+1} + C_{k+2}^k x_{k+2} + \ldots + C_n^k x_n, \qquad (11')$$

и следовательно, каждое из этих пересечений будет иметь площадь

$$f_n^{(k)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{C_n^k} x_k + \frac{C_{k+1}^k}{C_n^k} x_{k+1} + \ldots + \frac{C_n^k}{C_n^k} x_n = \sum_{i \geqslant k} x_i \frac{C_i^k}{C_n^k}. \qquad (12')$$

Далее, как и выше, показывается, что *при заданной характеристике* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *системы многоугольников минимум величины* $\max\limits_{i_1, \ldots, i_k} M_{i_1 \ldots i_k}$ *достигается для канонической системы и равен* $f_n^{(k)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Доказательство того, что функция $f_n^{(k)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ может достигнуть минимума лишь в том случае, когда *из чисел* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *отлично от нуля лишь одно единственное число или два соседних числа*, тоже практически не отличается от изложенного — новая характеристика $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ вводится здесь в точности так же, как выше, а приведенная на стр. 222 таблица заменяется следующей:

m	l	$f_n^{(k)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) - f_n^{(k)}(y_0, y_1, \ldots, y_n)$
$m < k$	$l \leqslant m-2$	0
$m = k$	$l \leqslant m-2$	$x_l \dfrac{1}{C_n^k} > 0$
$m > k$	$l < k-1$	$x_l \dfrac{-C_{m-1}^k + C_m^k}{C_n^k} = x_l \dfrac{C_{m-1}^{k-1}}{C_n^k} > 0$
$m > k$	$l = k-1$	$x_l \dfrac{-C_k^k - C_{m-1}^k + C_m^k}{C_n^k} = x_l \dfrac{C_{m-1}^{k-1} - 1}{C_n^k} > 0$
$m \geqslant l+2$	$l \geqslant k$	$x_l \dfrac{C_l^k - C_{l+1}^k - C_{m-1}^k + C_m^k}{C_n^k} = x_l \dfrac{C_{m-1}^{k-1} - C_l^{k-1}}{C_n^k} > 0$

Все дальнейшие рассуждения полностью сохраняют силу. Нам остается поэтому заменить в формуле (17) число 2 на k, а β на α и произвести необходимые упрощающие преобразования. Окончательно получаем, что

$$f_n^{(k)}(\alpha)=\frac{C_{r-1}^{k-1}}{C_n^k}\left(n\alpha-\frac{r(k-1)}{k}\right)\quad\left(\text{при}\quad\frac{r-1}{n}\leqslant\alpha\leqslant\frac{r}{n}\right).\quad(**)$$

в) Эту задачу также можно решить аналогично (второму решению задачи а) и решению задачи б); однако здесь нужны некоторые изменения проведенных выше рассуждений. Прежде всего выделим ту часть квадрата M, которая покрыта многоугольниками M_i *не менее чем* $(h-1)$*-кратно*, и пусть площадь этой части квадрата равна $\frac{1}{\gamma}$ (где $\gamma\geqslant 1$). Сохраняя прежний смысл за обозначением x_i (где $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), мы условимся теперь называть характеристикой системы $\mathcal{R}$ покрывающих квадрат M многоугольников M_i *совокупность* $n-h+2$ *чисел* $(x_{h-1},\ x_h,\ x_{h+1},\ \ldots,\ x_n)$; при этом играющие важную роль в решениях задач а) и б) условия (9) и (10) заменятся следующими:

$$x_{h-1}+x_h+\ \ldots\ +x_n=\frac{1}{\gamma}\qquad(\gamma\geqslant 1),\qquad(9')$$

$$0\cdot x_{h-1}+C_h^h x_h+\ \ldots\ +C_n^h x_n=\beta C_n^h\qquad(\alpha\leqslant\beta\leqslant 1)\quad(10')$$

(выражение, стоящее в левой части равенства (10′), равно сумме площадей всех h-кратных пересечений многоугольников системы). Определение канонической системы многоугольников, отвечающей данной характеристике, переносится на рассматриваемый случай без всяких изменений; при этом по-прежнему сумма площадей всех h-кратных пересечений многоугольников дается формулой (11′), — и следовательно, каждое из этих пересечений будет иметь площадь (12′) (см. стр. 223; эту площадь мы здесь обозначим через $f_n^{(h,\,k)}(x_{h-1},\ x_h,\ \ldots,\ x_n)$).

Доказательство того, что при заданной характеристике $(x_{h-1},\ x_h,\ \ldots,\ x_n)$ наименьшее значение $\max\limits_{(i_1,\ \ldots,\ i_k)} M_{i_1\ldots i_k}$ доставляется функцией $f_n^{(h,\,k)}(x_{h-1},x_h,\ldots,x_n)$, не отличается от изложенного выше. Здесь снова минимум функции $f_n^{(h,\,k)}(x_{h-1},x_h,\ldots,x_n)$ может достигаться лишь в том случае, когда *только одно или два соседних из чисел* $x_{h-1},\ x_h,\ \ldots,\ x_n$ *отличны от нуля*. В самом деле, предположим, что $m-l\geqslant 2$, где x_l $(l\geqslant h-1)$ — первое отличное от нуля из наших чисел, x_m — последнее отличное от нуля число и для определенности положим: $C_{m-1}^{h-1}x_m\geqslant C_l^{h-1}x_l$. Заменим характеристику $(x_{h-1},\ x_h,\ \ldots,\ x_n)$ новой характеристикой

$(y_{h-1}, y_h, \ldots, y_n)$, отличающейся от прежней лишь числами

$$y_l = x_l - x_l = 0, \quad y_{l+1} = x_l, \quad y_{m-1} = x_{m-1} + \frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} x_l,$$

$$y_m = x_m - \frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} x_l \quad \text{при} \quad m > l+2;$$

$$y_l = x_l - x_l = 0, \quad y_{l+1} = x_{l+1} + \frac{C_l^{h-1} + C_{l+1}^{h-1}}{C_{l+1}^{h-1}} x_l, \tag{13'}$$

$$y_{l+2} = x_{l+2} - \frac{C_l^{h-1}}{C_{l+1}^{h-1}} x_l \quad \text{при} \quad m = l+2.$$

Для характеристики $(y_{h-1}, y_h, \ldots, y_n)$ также выполняются условия (9′) и (10′), поскольку имеют место равенства (14) (где $x_i = y_i = 0$ при $i < h-1$) и

$$y_h + C_{h+1}^h y_{h+1} + \ldots + C_n^h y_n = x_h + C_{h+1}^h x_{h+1} + \ldots + C_n^h x_h \tag{15'}$$

(сумма, стоящая в левой части равенства (15′), отличается от стоящей справа суммы на величину

$$x_l \left(- C_l^h + C_{l+1}^h + C_{m-1}^h \frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} - C_m^h \frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} \right) = 0).$$

Далее таблицам на стр. 222 и на стр. 223 соответствует таблица, приведенная на стр. 226.

Теперь, когда доказано, что $m - l \leqslant 1$, характеристика $(x_{h-1}, x_h, \ldots, x_n)$ однозначно определяется условиями (9′), (10′). Именно, при $\frac{C_{r-1}^h}{C_n^h} \leqslant \beta\gamma \leqslant \frac{C_r^h}{C_n^h}$ имеем

$$x_{r-1} = \frac{\frac{1}{\gamma} C_r^h - \beta C_n^h}{C_{r-1}^{h-1}}, \qquad x_r = \frac{\beta C_n^h - \frac{1}{\gamma} C_{r-1}^h}{C_{r-1}^{h-1}}. \tag{16'}$$

Далее, пользуясь формулой (12′), находим

$$f_n^{(h,k)}(0, \ldots, 0, x_{r-1}, x_r, 0, \ldots, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r < k, \\ \dfrac{C_r^k}{C_n^k C_{r-1}^{h-1}} \left(\beta C_n^h - \dfrac{r-h}{r\gamma} C_r^h \right) & \text{при} \quad r = k, \\ \dfrac{\frac{1}{\gamma}\left(C_r^h C_{r-1}^k - C_{r-1}^h C_r^k\right) + \beta C_n^h C_{r-1}^{k-1}}{C_n^k C_{r-1}^{h-1}} & \text{при} \quad r > k. \end{cases} \tag{17'}$$

m	l	$f_n^{(h,k)}(x_{h-1}, x_h, \ldots, x_n) - f_n^{(h,k)}(y_{h-1}, y_h, \ldots, y_n)$
$m < k$	$l \leqslant m-2$	0
$m = k$	$l \leqslant m-2$	$\frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} x_l \frac{1}{C_n^k} > 0$
$m > k$	$l < k-1$	$\frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} x_l \frac{-C_{m-1}^k + C_m^k}{C_n^k} = \frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} x_l \frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_n^k} > 0$
$m > k$	$l = k-1$	$x_l\left(\frac{C_{k-1}^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}} \frac{-C_{m-1}^k + C_m^k}{C_n^k} - \frac{1}{C_n^k}\right) = x_l \frac{C_{k-1}^{h-1}C_{m-1}^{k-1} - C_{m-1}^{h-1}}{C_n^k C_{m-1}^{h-1}} =$ $= x_l \frac{C_{k-1}^{h-1}}{C_m^k} \frac{(h-1)!}{(k-1)!} [(m-h) \ldots (m-k+1) - (k-h) \ldots 2] > 0$
$m \geqslant l+2$	$l \geqslant k$	$x_l \frac{C_l^k - C_{l+1}^k + \frac{C_l^{h-1}}{C_{m-1}^{h-1}}(C_m^k - C_{m-1}^k)}{C_n^k} = x_l \frac{C_l^{h-1}C_{m-1}^{k-1} - C_l^{k-1}C_{m-1}^{h-1}}{C_n^k C_{m-1}^{h-1}} =$ $= x_l \frac{C_l^{h-1}}{C_n^k} \frac{(h-1)!}{(k-1)!} [(m-h) \ldots (m-k+1) - (l-h+1) \ldots (l-k+2)] > 0.$

Эту запись можно упростить, и для любого $r \geqslant h$ получим

$$f_n^{(h,\,k)}(0,\,\ldots,\,0,\,x_{r-1},\,x_r,\,0,\,\ldots,\,0) = \frac{C_{r-1}^{k-1}}{C_n^k C_{r-1}^{h-1}}\left(C_n^h\beta - \frac{k-h}{\gamma k}\,C_r^h\right).$$

Мы пришли к функции, зависящей от двух параметров β и γ. При фиксированном β эта функция является неубывающей функцией от γ. Поэтому γ следует придать наименьшее возможное значение, равное 1. Затем, рассуждая совершенно так же, заменяем β на α. Окончательно получаем

$$f_n^{(h,\,k)}(\alpha) = \frac{C_{r-1}^{k-1}}{C_n^k C_{r-1}^{h-1}}\left(C_n^h\alpha - \frac{k-h}{k}\,C_r^h\right),$$

где r выбирается из условия $\quad \dfrac{C_{r-1}^h}{C_n^h} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{C_r^h}{C_n^h}$. (***)

61. а) Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника M площади 1, C — точка многоугольника M, наиболее удаленная от AB (или одна из таких точек, если M имеет параллельную AB сторону). Прямая AC делит многоугольник M на две части M_1 и M_2 (рис. 119; одна из этих частей может и не существовать). Если D_1 и D_2 — точки многоугольников M_1, соответственно M_2, наиболее удаленные от прямой AC (или какие-то из таких точек), $l \parallel AB$ проходит через точку C, а $l_1 \parallel AC$ и $l_2 \parallel AC$ — через точки D_1 и D_2, то прямые AB, l, l_1 и l_2 образуют некоторый параллелограмм Π, заключающий M внутри себя.

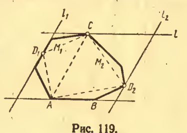


Рис. 119.

Так как многоугольники M_1 и M_2 выпуклые, то M_1 содержит $\triangle AD_1C$, а M_2 содержит $\triangle AD_2C$. Прямая AC *делит параллелограмм* Π на два параллелограмма Π и Π_2, причем

$$S_{AD_1C} = \frac{1}{2}S_{\Pi_1} \quad \text{и} \quad S_{AD_2C} = \frac{1}{2}S_{\Pi_2}.$$

Отсюда следует, что

$$S_\Pi = S_{\Pi_1} + S_{\Pi_2} = 2S_{AD_1C} + 2S_{AD_2C} \leqslant 2S_{M_1} + 2S_{M_2} = 2S_M = 2,$$

что и требовалось доказать (если $S_\Pi < 2$, то мы можем увеличить этот параллелограмм так, чтобы он продолжал заключать M внутри себя).

б) Пусть Π — параллелограмм, содержащий внутри себя $\triangle ABC$ площади 1. Уменьшим Π, сдвинув параллельно его стороны до тех

пор, пока они не «упрутся» в вершины треугольника; пусть A — вершина, через которую проходят две стороны полученного таким образом параллелограмма $\Pi \equiv APQR$ (рис. 120). Проведем через C прямую $l \parallel PQ \parallel AR$; точки пересечения l с AB и AP обозначим через D и E. Тогда, очевидно,

Рис. 120.

$$S_{CBD} \leqslant S_{CBE} = \frac{1}{2} S_{CQPE}$$

и

$$S_{CAD} \leqslant S_{CAE} = \frac{1}{2} S_{CRAE},$$

откуда и следует требуемый результат:

$$S_{ABC} = S_{CBD} + S_{CAD} \leqslant \frac{1}{2} S_{CQPE} + \frac{1}{2} S_{CRAE} = \frac{1}{2} S_{APQR},$$

т. е.

$$S_{APQR} \geqslant 2S_{ABC} = 2$$

(если C есть внутренняя точка стороны QR, то $S_{APQR} = 2$ только в том случае, если B совпадает с P).

62. а) Впишем в данный многоугольник U треугольник $A_1A_2A_3$ наибольшей возможной площади (ср. задачу 37 на стр. 36 и относящийся к ней текст). Предположим сначала, что площадь этого треугольника не больше 1/2. Прямые, проходящие через вершины A_1, A_2, A_3 треугольника параллельно его противоположным сторонам, образуют треугольник T, площадь которого равна $4S$.

Покажем, что U *лежит целиком внутри* T. Действительно, если точка M многоугольника U лежит вне T, то M дальше хотя бы от

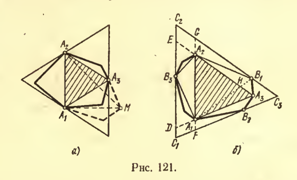


Рис. 121.

одной из сторон $\triangle A_1A_2A_3$ (например, от A_1A_2), чем противоположная этой стороне вершина треугольника. Но тогда вписанный в U треугольник MA_1A_2 по площади больше $\triangle A_1A_2A_3$ (рис. 121, a), что, однако, противоречит определению треугольника $A_1A_2A_3$. Итак, в рассматриваемом случае U заключен внутри треугольника T площади $\leqslant 2$, что и требовалось доказать (ибо ясно, что тогда U

можно заключить и внутрь треугольника, площадь которого равна 2).

Несколько более сложным является случай, когда $S_{A_1A_2A_3} > \frac{1}{2}$ (рис. 121, *б*). В каждую из частей, отрезаемых от многоугольника U сторонами $\triangle A_1A_2A_3$, впишем наибольший по площади треугольник, основание которого совпадает с соответствующей стороной $\triangle A_1A_2A_3$, и через свободные вершины B_1, B_2, B_3 этих треугольников проведем прямые, параллельные их основаниям. Мы получим некоторый треугольник $C_1C_2C_3$. Совершенно аналогично предыдущему доказывается, что U лежит целиком внутри $\triangle C_1C_2C_3$. Докажем, что

$$S_{C_1C_2C_3} \leqslant 2S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}.$$

А так как последняя площадь не больше 1 (т. е. площади U), то отсюда и следует требуемое неравенство.

Рассмотрим отдельно шестиугольник $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ и описанный около него треугольник $C_1C_2C_3$. Положим

$$\frac{S_{A_1A_2B_3}}{S_{A_1A_2A_3}} = \lambda_3, \quad \frac{S_{A_1A_3B_2}}{S_{A_1A_2A_3}} = \lambda_2, \quad \frac{S_{A_2A_3B_1}}{S_{A_1A_2A_3}} = \lambda_1;$$

тогда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{S_{A_1A_2B_3} + S_{A_1A_3B_2} + S_{A_2A_3B_1}}{S_{A_1A_2A_3}} < 1,$$

так как по условию $S_{A_1A_2A_3} > \frac{1}{2}$, а площадь всего многоугольника U равна 1.

Продолжим стороны треугольника $A_1A_2A_3$, как указано на рис. 121, *б*. Отметим, что отношение высот $\triangle B_3A_1A_2$ и $\triangle A_3A_1A_2$, опущенных на общую сторону A_1A_2, равно отношению площадей этих треугольников, т. е. равно λ_3. Точно так же отношение высот $\triangle B_2A_1A_3$ и $\triangle A_2A_1A_3$, опущенных на общую сторону A_1A_3, равно λ_2, а отношение высот $\triangle B_1A_2A_3$ и $\triangle A_1A_2A_3$, опущенных на общую сторону A_2A_3, равно λ_1. Отсюда без труда получаем

$$\frac{ED}{A_1A_2} = 1 + \lambda_3, \quad \frac{C_2E}{A_1A_2} = \frac{GA_2}{A_1A_2} = \frac{B_1H}{A_1H} = \lambda_1, \quad \frac{C_1D}{A_1A_2} = \frac{FA_1}{A_1A_2} = \lambda_2.$$

Поэтому коэффициент подобия треугольников $C_1C_2C_3$ и $A_1A_2A_3$ равен

$$\frac{C_1C_2}{A_1A_2} = \frac{C_1D + DE + EC_2}{A_1A_2} = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{C_1C_2C_3}}{S_{A_1A_2A_3}} = (1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2,$$

а так как, кроме того, очевидно, имеем

$$\frac{S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}}{S_{A_1A_2A_3}} = \frac{S_{A_1A_2A_3} + S_{B_1A_2A_3} + S_{B_2A_1A_3} + S_{B_3A_1A_2}}{S_{A_1A_2A_3}} =$$
$$= 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

то окончательно приходим к равенству

$$\frac{S_{C_1C_2C_3}}{S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}} = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Из этого равенства и следует, что

$$S_{C_1C_2C_3} < 2,$$

так как

$$S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2} \leqslant S_U = 1, \quad \text{а} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 1.$$

Этим завершается доказательство.

б) Покажем прежде всего, что квадрат со стороной 1 нельзя заключить ни в какой треугольник площади < 2. Пусть $\triangle C_1C_2C_3$ описан вокруг квадрата $A_1A_2A_3A_4$ так, как это изображено на рис. 122, *а*. Продолжим стороны A_2A_3 и A_4A_3 квадрата

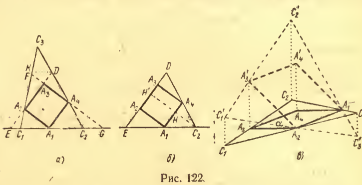


Рис. 122.

до пересечения со сторонами C_3C_2, C_1C_2, соответственно C_3C_1, C_2C_1 треугольника в точках D, E и F, G. Так как $\angle A_4A_3D$ и $\angle A_2A_3F$ прямые, то $\angle A_2DC_3$ и $\angle A_4FC_3$ тупые. Далее

$$\angle A_2EA_1 + \angle A_4GA_1 = 180^\circ - \angle EA_3G = 90^\circ,$$
$$\angle A_2A_1E + \angle A_4A_1G = 90^\circ,$$

откуда следует, что либо $\angle A_2A_1E \leqslant \angle A_2EA_1$, либо $\angle A_4A_1G \leqslant \angle A_4GA_1$; предположим для определенности, что имеет место первое из этих неравенств. В таком случае

$$A_2E \leqslant A_2A_1 = A_2A_3 < A_2D$$

и из рис. 122, *а* (где $DK \parallel EC_1$) с очевидностью следует:

$$S_{A_2DC_3} > S_{A_2EC_1}, \quad S_{EDC_3} < S_{C_1C_3C_2}.$$

Таким образом, мы пришли к описанному около квадрата $\triangle EDC_2$, площадь которого *меньше* площади $\triangle C_1C_3C_2$ и такому, что на одной стороне $\triangle EDC_2$ лежат две вершины квадрата (если уже у $\triangle C_1C_2C_3$ была сторона, на которой лежат две вершины квадрата, то этот этап решения можно опустить).

Обозначим высоту $\triangle A_1A_4C_2$, опущенную на сторону A_1A_4, через h; пусть H и H' — точки пересечения этой высоты со сторонами A_1A_4 и A_2A_3 квадрата (рис. 122, *б*); $HH'=1$ (стороне квадрата). В таком случае

$$\frac{S_{C_2HA_4}}{S_{HA_4A_3H'}}=\frac{h}{2},\quad \frac{S_{C_2HA_4}}{S_{A_4A_3D}}=h^2$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{A_4A_3D}}{S_{HA_4A_3H'}}=\frac{1}{2h},$$

$$\frac{S_{C_2H'D}}{S_{HA_4A_3H'}}=\frac{S_{C_2HA_4}+S_{HA_4A_3H'}+S_{A_4A_3D}}{S_{HA_4A_3H'}}=1+\frac{h}{2}+\frac{1}{2h}.$$

Точно так же показывается, что

$$\frac{S_{C_2H'E}}{S_{HA_1A_2H'}}=1+\frac{h}{2}+\frac{1}{2h}.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{S_{C_2ED}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=1+\frac{h}{2}+\frac{1}{2h}=2+\left(\frac{h}{2}-1+\frac{1}{2h}\right)=$$

$$=2+\left(\sqrt{\frac{h}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2h}}\right)^2\geqslant 2,$$

т. е.

$$S_{C_2ED}\geqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

Но если вокруг *квадрата* площади 1 нельзя описать треугольник площади <2, то и вокруг произвольного *прямоугольника* $A_1A_2A_3A_4$ площади 1 нельзя описать $\triangle C_1C_2C_3$ площади <2. Действительно, предположим, что это не так, и построим квадрат $A_1A_2A_3'A_4'$, сторона A_1A_2 которого совпадает с большей стороной A_1A_2 прямоугольника, а остальные стороны расположены в пространстве таким образом, что прямоугольник $A_1A_2A_3A_4$ представляет собой ортогональную проекцию квадрата на плоскость прямоугольника (рис. 122, *в*; для этого, очевидно, надо, чтобы было $\frac{A_2A_3}{A_2A_3'}=\cos\alpha$, где α — угол между плоскостями квадрата и прямоугольника). Обозначим далее через $C_1'C_2'C_3'$ треугольник, описанный вокруг квадрата $A_1A_2A_3'A_4'$ и проектирующийся в треугольник $C_1C_2C_3$. Так как при ортогональном проектировании каждая фигура переходит в фигуру, площадь которой равна площади первоначальной

фигуры, умноженной на $\cos\alpha$, то *отношение площадей фигур при проектировании не меняется.* Следовательно, если $S_{C_1C_2C_3} < 2S_{A_1A_2A_3A_4}$, то должно быть и $S_{C_1'C_2'C_3'} < 2S_{A_1A_2'A_3A_4'}$, в то время как последнее неравенство невозможно.

Далее, если вокруг *прямоугольника* площади 1 нельзя описать треугольник площади, меньшей 2, то и вокруг произвольного *параллелограмма* $A_1A_2A_3A_4$ нельзя описать треугольник $C_1C_2C_3$, площадь которого была бы меньше 2. Действительно, предположим, что это не так, и построим сферу, диаметром которой является бо́льшая диагональ A_1A_3 параллелограмма; пусть A_2' и A_4' — точки пересечения сферы с перпендикулярами к плоскости параллелограмма, восставленными в вершинах A_2 и A_4 (сделайте чертеж!). В таком случае очевидно, что четырехугольник $A_1A_2'A_3A_4'$ — плоский прямоугольник, который проектируется в параллелограмм $A_1A_2A_3A_4$. Обозначив через $C_1'C_2'C_3'$ треугольник, описанный вокруг прямоугольника $A_1A_2'A_3A_4'$ и проектирующийся в треугольник $C_1C_2C_3$, мы, как выше, вынуждены будем заключить, что площадь треугольника $C_1'C_2'C_3'$ меньше двойной площади прямоугольника $A_1A_2'A_3A_4'$, что невозможно [1]).

63. а) Проведем две прямые, параллельные l и расположенные по разные стороны от M, и затем сдвинем их так, чтобы они прошли через какие-то вершины A и B многоугольника; при этом мы получим описанную вокруг M «полосу», ограниченную двумя параллельными l прямыми l_1 и l_2, проходящими через A и через B (рис. 123). Обозначим расстояние между l_1 и l_2 через d и проведем еще три параллельные l прямые l_1', l_0 и l_2', делящие нашу «полосу» на четыре более узкие «полосы» ширины $\frac{d}{4}$; пусть l_1' пересекает контур M в точках P и Q, а l_2' — в R и S. Пусть далее p есть сторона M, проходящая через P (может быть, одна из двух таких сторон); точно так же q, r и s — стороны многоугольника, проходящие соответственно через Q, R и S. Площадь трапеции T_1,

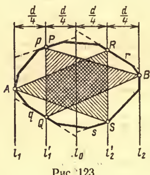


Рис. 123.

[1]) По существу здесь использовано то, что в *аффинной геометрии*, к которой относятся теоремы задач 62 а) и б), квадрат не отличается от произвольного параллелограмма (ср., например, [8] гл. 13; И. М. Яглом и Л. С. Атанасян, Геометрические преобразования, Энциклопедия элементарной математики, кн. IV (Геометрия), М., Физматгиз, 1963, п. 6.3; И. М. Яглом и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I, Аффинная геометрия, М., Учпедгиз, 1962).

ограниченной прямыми l_0, l_1, p и q, равна, очевидно, $PQ\cdot\frac{d}{2}$; точно так же площадь трапеции T_2, ограниченной l_0, l_2, r и s, равна $RS\cdot\frac{d}{2}$. Так как объединение трапеций T_1 и T_2 содержит M (быть может, совпадает с M), то

$$S_M\leqslant S_{T_1}+S_{T_2}=PQ\cdot\frac{d}{2}+RS\cdot\frac{d}{2}=(PQ+RS)\cdot\frac{d}{2}.$$

Рассмотрим теперь $\triangle ARS$ и $\triangle BPQ$, вписанные в многоугольник M. Очевидно, $S_{ARS}=\frac{1}{2}RS\cdot\frac{3}{4}d$; $S_{BPQ}=\frac{1}{2}PQ\cdot\frac{3}{4}d$, следовательно,

$$S_{ARS}+S_{BPQ}=(RS+PQ)\cdot\frac{3}{8}d=$$
$$=\frac{3}{4}(PQ+RS)\cdot\frac{d}{2}\geqslant\frac{3}{4}S_M.$$

Но в таком случае

или $S_{ARS}\geqslant\frac{3}{8}S_M$ или $S_{BPQ}\geqslant\frac{3}{8}S_M$,

что и доказывает утверждение задачи.

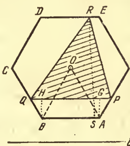


Рис. 124.

б) Пусть M — *правильный шестиугольник* $ABCDEF$, а l *параллельна стороне* AB шестиугольника (рис. 124). Далее, пусть PQR — вписаный в M треугольник наибольшей возможной площади, одна сторона PQ которого параллельна AB. Если P и Q лежат соответственно на сторонах AF и BC шестиугольника, то, очевидно, вершина R должна принадлежать DE. Примем длину стороны шестиугольника за 1 и обозначим расстояние $AP=BQ$ через a. В таком случае, как легко подсчитать,

$$PQ=AB+PG+QH=1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=1+a$$

и

$$h_{PQ}=RS-AG=\sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}=(2-a)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

следовательно,

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}(1+a)(2-a)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+a-a^2)=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[2\frac{1}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Поэтому, для того чтобы S_{PQR} была наибольшей возможной, необходимо, чтобы было $a-\frac{1}{2}=0$, $a=\frac{1}{2}$; тогда

$$S_{PQR}=\frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Но площадь всего шестиугольника M равна

$$6S_{OAB} = 6\,\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(O — центр шестиугольника); отсюда следует, что наибольший по площади вписанный в $ABCDEF$ треугольник, одна сторона которого параллельна AB, имеет площадь, равную $\frac{3}{8}S_{ABCDEF}$, что и требовалось доказать.

64. Ясно, что, скажем, $A_1'A_2'$ — средняя линия $\triangle A_1A_2A_3$, и т. д.; поэтому в обозначениях рис. 125

а) $$P' = A_1'A_2' + A_2'A_3' + A_3'A_4' + \ldots + A_{n-1}'A_n' + A_n'A_1' =$$
$$= \frac{1}{2}(A_1A_3 + A_2A_4 + \ldots + A_{n-1}A_1 + A_nA_2) >$$
$$> \frac{1}{2}[(A_1B_1 + B_2A_3) + (A_2B_2 + B_3A_4) + \ldots + (A_nB_n + B_1A_2)] =$$
$$= \frac{1}{2}[(A_1B_1 + B_1A_2) + (A_2B_2 + B_2A_3) + \ldots + (A_nB_n + B_nA_1)] >$$
$$> \frac{1}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nB_n) = \frac{1}{2}P$$

(неравенство $P' < P$ с очевидностью следует из того, что выпуклый многоугольник M' заключается внутри M).

б) $$S - S' = S_{A_1A_n'A_1'} + S_{A_2A_1'A_2'} + \ldots + S_{A_nA_{n-1}'A_n'} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(S_{A_1A_nA_2} + S_{A_2A_1A_3} + \ldots + S_{A_nA_{n-1}A_1}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[2\left(S_{A_1B_1A_2} + S_{A_2B_2A_3} + \ldots + S_{A_nB_nA_1}\right) +\right.$$
$$\left. + \left(S_{A_1B_nB_1} + S_{A_2B_1B_2} + \ldots + S_{A_nB_{n-1}B_n}\right)\right] \leqslant \frac{1}{4}(2S) = \frac{1}{2}S,$$

откуда сразу вытекает, что $S' \geqslant \frac{1}{2}S$; неравенство $S' < S$ является очевидным.

Из этих рассуждений также следует, что равенство $P' = \frac{1}{2}P$ может иметь место лишь для *треугольника*, а равенство $S' = \frac{1}{2}S$ — только для *четырехугольника*; при $n > 3$ результат задачи а) может быть усилен таким образом: $P > P' > \frac{1}{2}P$; аналогично этому при $n > 4$ результат задачи б) можно усилить так: $S > S' > \frac{1}{2}S$

(при $n = 3$, соответственно при $n = 4$, наши неравенства вообще заменяются на *равенства*: $P' = \frac{1}{2} P$, соответственно $S' = \frac{1}{2} S$). Для $n > 3$, соответственно для $n > 5$, неравенства

$$P > P' > \frac{1}{2} P \quad \text{и} \quad S > S' > \frac{1}{2} S$$

улучшены быть не могут: это означает, что здесь периметр P' многоугольника M' может быть *сколь угодно близок* и к P, и к $\frac{1}{2} P$; соответственно площадь S' многоугольника M' может быть *сколь угодно близка* и к S, и к $\frac{1}{2} S$. В самом деле, если n-угольник M,

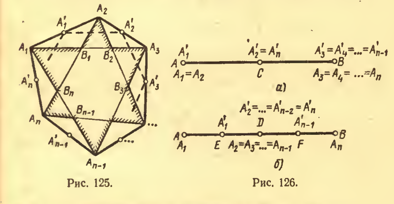


Рис. 125. Рис. 126.

где $n > 3$, «вырождается» в отрезок AB, где мы считаем $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = A_4 = \ldots = A_n = B$ (рис. 126, *а*), то, очевидно, $A_1' = A$, $A_2' = A_n' = C$ (середина отрезка AB), $A_3' = \ldots = A_{n-1}' = B$, так что «многоугольник» M' совпадает с тем же отрезком AB и $P' = P$ $(= 2AB)$; поэтому если M очень близок к этому «предельному» положению, то P' близко к P. Аналогично этому, если M «вырождается» в отрезок AB так, что $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = D$ (точка отрезка AB) и $A_n = B$ (см. рис. 126, *б*, на котором D — середина отрезка AB), то M обращается в отрезок EF, где E и F — середины отрезков AD и DB, так что здесь $P' = \frac{1}{2} P$; отсюда следует, что и для «истинных» (выпуклых) n-угольников, близких к этому «предельному» многоугольнику, величина P' может быть сколь угодно близка к $\frac{1}{2} P$.

Совершенно таким же образом, если n-угольник M, где $n \geqslant 4$, «вырождается» в треугольник ABC площади S, причем $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = A_4 = \ldots = A_n = C$, то, очевидно, многоугольник M' обращается в заштрихованный на рис. 127, *а* параллелограмм площади $\frac{1}{2} S$; отсюда вытекает, что и для «истинного» n-угольника M

величина S' может быть сколь угодно близка к $\frac{1}{2} S$. Аналогично этому, если n-угольник M, где $n \geqslant 6$, «вырождается» в треугольник ABC, так что $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = A_4 = B$ и $A_5 = \ldots = A_n = C$ (рис. 127, б), то M' совпадает с M и $S' = S$, откуда следует, что

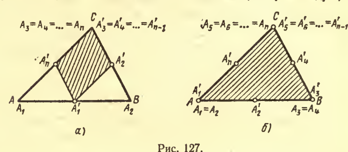


Рис. 127.

при $n \geqslant 6$ площадь S' может быть сколь угодно близка к S. Однако при $n = 5$ неравенство $S > S' > \frac{1}{2} S$ можно усилить, заменив его следующим: $\frac{3}{4} S > S' > \frac{1}{2} S$ (см. выше задачу 42 а)).

65. Так как $\triangle OA_1A_2$, образованный центром O окружности K радиуса 1 и двумя ее точками A_1 и A_2, такими, что $\angle A_1OA_2 = 2\alpha$ (см. рис. 23, б на стр. 58), имеет, очевидно, основание $A_1A_2 = 2 \sin \alpha_1$ и площадь $S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1$, то периметр P и площадь S вписанного в единичную окружность K выпуклого n-угольника M, сторонам которого отвечают центральные углы $2\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, 2\alpha_n$, равны (мы здесь считаем, что центр окружности заключен внутри M)

$$P = 2(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n)$$

и

$$S = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \ldots + \sin 2\alpha_n).$$

Таким образом, задачи а) и б) сводятся к доказательству неравенств

а) $$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n \leqslant \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \ldots + \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2},$$

соответственно

б) $$\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \ldots + \sin 2\alpha_n \leqslant \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + \ldots + \sin(\alpha_1 + \alpha_n),$$

где $0 < \alpha_i < 90°$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180°$.

Но, например,

$$2[\sin(\alpha_1+\alpha_2)+\sin(\alpha_2+\alpha_3)+\ldots+\sin(\alpha_n+\alpha_1)]-$$
$$-2(\sin 2\alpha_1+\sin 2\alpha_2+\ldots+\sin 2\alpha_n)=$$
$$=[2\sin(\alpha_1+\alpha_2)-(\sin 2\alpha_1+\sin 2\alpha_2)]+$$
$$+[2\sin(\alpha_2+\alpha_3)-(\sin 2\alpha_2+\sin 2\alpha_3)]+\ldots$$
$$\ldots+[2\sin(\alpha_n+\alpha_1)-(\sin 2\alpha_n+\sin 2\alpha_1)]=$$
$$=[2\sin(\alpha_1+\alpha_2)-2\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)]+$$
$$+[2\sin(\alpha_2+\alpha_3)-2(\sin(\alpha_2+\alpha_3)\cos(\alpha_2-\alpha_3)]+\ldots$$
$$\ldots+[2\sin(\alpha_n+\alpha_1)-2\sin(\alpha_n+\alpha_1)\cos(\alpha_n-\alpha_1)]=$$
$$=2\sin(\alpha_1+\alpha_2)[1-\cos(\alpha_1-\alpha_2)]+2\sin(\alpha_2+\alpha_3)[1-\cos(\alpha_2-\alpha_3)]+\ldots$$
$$\ldots+2\sin(\alpha_n+\alpha_1)[1-\cos(\alpha_n-\alpha_1)]\geqslant 0,$$

где равенство имеет место, только если $\alpha_1=\alpha_2$, $\alpha_2=\alpha_3$, $\ldots$, $\alpha_n=\alpha_1$, т. е. если $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$, и n-угольник M *правильный*.

Точно так же доказывается и неравенство а).

66. Заметим прежде всего, что *если* $AB=a$ *и* $CD=b$ — *две хорды одной окружности* K (*с центром* O и, скажем, с радиусом 1), $a\smile AB=2\alpha$ и $\smile CD=2\beta>2\alpha$) — *стягиваемые этими хордами дуги* (где $\beta<90°$), *то*

$$\frac{AB}{CD}>\frac{\smile AB}{\smile CD} \qquad (*)$$

и

$$\frac{S_{AOB}}{S_{COD}}>\frac{\smile AB}{\smile CD}. \qquad (**)$$

В самом деле, так как $AB=2\sin\alpha$ и $BC=2\sin\beta$ (ср. с решением задачи 65), то неравенство (*) эквивалентно следующему:

$$\frac{2\sin\alpha}{2\sin\beta}>\frac{2\alpha}{2\beta}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}.$$

Вспомним теперь, что при $x\to 0$ отношение $\frac{\sin x}{x}$ (где угол x измеряется в радианах!) стремится к 1, а при $x=\frac{\pi}{2}(=90°)$ имеем $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}\approx 0{,}63<1$; это делает неравенство (*) правдоподобным, но, разумеется, не доказывает его. Однако если придать x малое приращение ξ, то отношение $\frac{\sin x}{x}$ заменится на отношение

$\dfrac{\sin(x+\xi)}{x+\xi}$, которое будет *меньше* первоначального, ибо [1])

$$\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin(x+\xi)}{x+\xi}=$$
$$=\frac{x\sin x+\xi\sin x-x\sin x\cos\xi-x\cos x\sin\xi}{x(x+\xi)}=$$
$$=\frac{x\sin x(1-\cos\xi)+\xi\left(\sin x-x\cos x\dfrac{\sin\xi}{\xi}\right)}{x(x+\xi)}=$$
$$=\frac{x\sin x(1-\cos\xi)}{x(x+\xi)}+\frac{\xi\cos x}{x(x+\xi)}\left(\operatorname{tg}x-x\frac{\sin\xi}{\xi}\right)>0;$$

здесь первое слагаемое положительно в силу неравенства $1>\cos\xi$, а второе при достаточно малом ξ — в силу известного неравенства $\operatorname{tg}x>x$ (см., например, рис. 128, где $2\operatorname{tg}x=S_{OPR}$, $2x=S_{\text{сект. } OPQ}$, и в силу того, что, выбрав ξ достаточно малым, мы всегда можем сделать отношение $\dfrac{\sin\xi}{\xi}$ сколь угодно близким к 1. Таким образом, при последовательном увеличении значения x на малые ξ отношение $\dfrac{\sin x}{x}$ будет все время только у б ы в а т ь, откуда и вытекает справедливость неравенства (*).

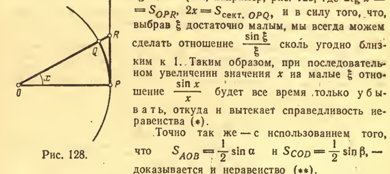


Рис. 128.

Точно так же — с использованием того, что $S_{AOB}=\frac{1}{2}\sin\alpha$ и $S_{COD}=\frac{1}{2}\sin\beta$, — доказывается и неравенство (**).

а) Обозначим стороны многоугольника M_1, взятые в н е в о з р а с т а ю щ е м по величине порядке, через $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а отвечающие им дуги окружности K (в угловой мере) — через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; аналогично этому стороны многоугольника M_2, взятые в н е у б ы в а ю щ е м порядке, обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а отвечающие им дуги K — через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. В силу (*), учитывая условия задачи, имеем

$$\frac{a_m}{\alpha_m}\geqslant\frac{a_{m-1}}{\alpha_{m-1}}\geqslant\ldots\geqslant\frac{a_2}{\alpha_2}\geqslant\frac{a_1}{\alpha_1}>\frac{b_1}{\beta_1}\geqslant\frac{b_2}{\beta_2}\geqslant\ldots\geqslant\frac{b_n}{\beta_n}.$$

Воспользуемся теперь следующим известным свойством неравенств (с положительными членами):

$$\text{если}\quad\frac{a}{b}>\frac{c}{d},\quad\text{то}\quad\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}.$$

---

[1]) Читатель, знакомый с дифференциальным исчислением, сразу увидит, что здесь, по существу, использована о т р и ц а т е л ь н о с т ь *производной* $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

В самом деле, в наших предположениях, например,

$$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)}=\frac{d}{b+d}\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)>0,$$

и точно так же доказывается, что $\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$. Последовательно применяя несколько раз это свойство неравенств, получаем

$$\frac{P_1}{2\pi}=\frac{a_m+a_{m-1}+\ \dots\ +a_1}{\alpha_m+\alpha_{m-1}+\ \dots\ +\alpha_1}\geqslant\frac{a_1}{\alpha_1}$$

и

$$\frac{b_1}{\beta_1}\geqslant\frac{b_1+b_2+\ \dots\ +b_{n-1}+b_n}{\beta_1+\beta_2+\ \dots\ +\beta_{n-1}+\beta_n}=\frac{P_2}{2\pi}.$$

Итак,

$$\frac{P_1}{2\pi}\geqslant\frac{a_1}{\alpha_1}\quad\text{и}\quad\frac{P_2}{2\pi}\leqslant\frac{b_1}{\beta_1}.$$

А так как $\frac{a_1}{\alpha_1}>\frac{b_1}{\beta_1}$, то $P_1>P_2$, что и требовалось доказать.

б) Решение этой задачи, аналогичное решению задачи а) (только роль неравенства (*) здесь будет играть неравенство (**)), предоставляется читателю.

67. а) Прежде всего заметим, что *если рассматриваемая ломаная состоит всего из двух звеньев AP и PB* (рис. 129, *а*), *то теорема справедлива*. Действительно, продолжим прямую AP за точку P и на продолжении отложим отрезок $PQ=PB$. Так как $\triangle BPQ$

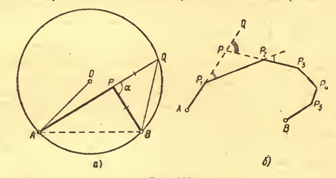


Рис. 129.

равнобедренный, то $\angle BQA=\frac{180^\circ-\angle BPQ}{2}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$; следовательно, точка Q принадлежит построенной на отрезке AB дуге окружности, вмещающей угол $\frac{180^\circ-\alpha}{2}$. Дуге AB этой окружности отвечает центральный угол $180^\circ-\alpha$; так как хорда $AB=1$, то отсюда следует, что радиус окружности равен $\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Но

$AQ = AP + PB$ не превосходит д и а м е т р а этой окружности; следовательно,

$$AP + PB \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

что и требовалось доказать. При этом $AP + PB = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ только в том случае, если треугольник APB равнобедренный.

Докажем теперь теорему м е т о д о м м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и. *Предположим, что наше утверждение верно для всех n-звенных ломаных, и докажем, что в таком случае оно будет также справедливо и для* $(n+1)$*-звенной ломаной* $AP_1P_2 \ldots P_nB$. Продолжим стороны AP_1 и P_3P_2 выпуклого многоугольника $AP_1P_2 \ldots P_nB$ до пересечения в точке P (рис. 128, б). Так как сумма внешних углов ломаной при P_1 и при P_2 по условию меньше 180°, то P будет лежать на продолжении AP_1 за точку P_1. Далее, внешний угол QPP_2 треугольника P_1PP_2 равен сумме внешних углов PP_1P_2 и PP_2P_1 многоугольника $AP_1P_2 \ldots P_nB$; отсюда следует, что сумма внешних углов n-звенной ломаной $APP_3P_4 \ldots P_nB$ при $P, P_3, P_4, \ldots, P_n$ будет равна сумме α внешних углов $(n+1)$-звенной ломаной $AP_1P_2 \ldots P_nB$. Так как мы считаем, что теорема уже доказана для всех n-звенных ломаных, то длина ломаной $APP_3P_4 \ldots P_nB$ не превосходит $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Но длина ломаной $AP_1P_2 \ldots P_nB$, очевидно, меньше длины ломаной $APP_3 \ldots P_nB$ (ибо $P_1P_2 < P_1P + PP_2$); следовательно, длина ломаной $AP_1P_2 \ldots P_nB$ и подавно меньше $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, что и требовалось доказать.

б) Эта задача очень близка к предшествующей. Прежде всего, ясно, что из всех треугольников APB с основанием $AB = a$ и внешним углом при вершине P, равным α (т. е. углом APB, равным $180° - \alpha$), наибольшую площадь $\left(\text{равную } \frac{a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4}\right)$ имеет равнобедренный треугольник (у него высота больше всего). То, что всякий выпуклый n-угольник, где $n > 3$, со стороной $AB = a$ и данной суммой внешних углов при вершинах, отличных от A и B, равной 120°, имеет площадь, большую $\frac{a^2 \operatorname{tg}\frac{120°}{2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, доказывается аналогично решению задачи а).

68. Обозначим длины сторон рассматриваемого n-угольника M через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и построим на каждой стороне обращенный внутрь M прямоугольник ширины $\frac{S}{P}$. Сумма площадей этих прямоугольников будет, очевидно, равна

$$a_1\frac{S}{P} + a_2\frac{S}{P} + \ldots + a_n\frac{S}{P} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\frac{S}{P} = P\frac{S}{P} = S,$$

— а поскольку они обязательно будут пересекаться (пересекаются, например, каждые два прямоугольника, построенные на двух соседних сторонах многоугольника M), то покрытая ими площадь всегда будет $<S$. Поэтому наши n прямоугольников не могут целиком покрыть весь многоугольник M; но если точка O остается не покрытой прямоугольниками, то круг радиуса $\frac{S}{P}$ с центром O не пересечет ни одной стороны M, т. е. будет целиком заключаться внутри M.

69. Первое решение. Преобразуем подобно четырехугольник $ABCD$ (где $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) с коэффициентом подобия $k = \frac{c}{a}$; при этом сторона $A'B'$ преобразованного четырехугольника $A'B'C'D'$ станет равной стороне CD четырехугольника $ABCD$. Сложим теперь четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$

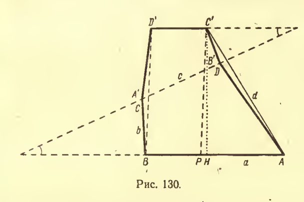


Рис. 130.

равными сторонами, как указано на рис. 130. Площадь всей образовавшейся фигуры $ABCD'C'D$ равна, очевидно, $S_{ABCD}+S_{A'B'C'D'} = (1+k^2)\,S_{ABCD}$. Из того, что четырехугольник $A'B'C'D'$ подобен четырехугольнику $ABCD$, следует, что $\angle BCD' = \angle ADC'$ (на рис. 130 $\angle BCD' = \angle C + \angle A$, $\angle ADC' = 360° - (\angle D + \angle B)$). Произведения сторон треугольников ADC' и BCD', заключающих равные углы, также равны: $d(k\cdot b) = b(k\cdot d)$. Таким образом, $S_{ADC'} = S_{BCD'}$ и, следовательно,

$$S_{ABCD'C'D} = (1+k^2)\,S_{ABCD} = S_{ABD'C'}.$$

Четырехугольник $ABD'C'$ является *трапецией*: параллельность сторон AB и $C'D'$ следует из равенства внутренних накрестлежащих углов, образованных ими с секущей CD. Нам надо выяснить, в каком случае *площадь трапеции* $ABD'C'$ *с заданными основаниями* $AB = a$ и $C'D' = k\cdot c = \frac{c^2}{a}$ *будет наибольшей*, т. е. в каком случае эта трапеция имеет наибольшую высоту.

Проведем $C'P \parallel D'B$ и рассмотрим треугольник $AC'P$, имеющий ту же высоту, что и трапеция $ABD'C$, и основание (мы считаем, что $a \geqslant c$)

$$AP = AB - C'D' = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a}.$$

Разность квадратов боковых сторон этого треугольника при заданных сторонах четырехугольника $ABCD$ является фиксированной. Действительно, по теореме косинусов

$$AC'^2 = AD^2 + DC'^2 - 2AD \cdot DC' \cos \angle ADC',$$

$$C'P^2 = D'B^2 = BC^2 + CD'^2 - 2BC \cdot CD' \cos \angle BCD',$$

и так как

$$AD \cdot DC' = BC \cdot CD' \quad \text{и} \quad \angle ADC' = \angle BCD',$$

то

$$AC'^2 - C'P^2 = d^2 + (k \cdot b)^2 - b^2 - (kd)^2 = (d^2 - b^2)(1 - k^2) = \\ = \frac{(d^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2}.$$

Пусть $C'H$ — высота $\triangle AC'P$. Тогда

$$AC'^2 = AH^2 + C'H^2, \quad C'P^2 = PH^2 + C'H^2,$$

$$AC'^2 - C'P^2 = \frac{(a^2 - c^2)(d^2 - b^2)}{a^2} = AH^2 - PH^2 = \\ = (AH + HP)(AH - HP),$$

и так как

$$AH \pm HP = AP = AB - PB = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} \qquad (*)$$

(это равенство выполняется либо когда в левой его части стоит знак «плюс», либо когда в левой части стоит «минус»), то

$$AH \mp HP = \frac{d^2 - b^2}{a} \qquad (**)$$

(причем знак в левой части равенства (**) противоположен знаку в левой части (*)).

Равенства (*) и (**) полностью определяют положение точки H на стороне AB. А если основание высоты, опущенной из вершины C' на сторону AB, не зависит от углов треугольника $AC'P$, то ясно, что высота $C'H$ будет наибольшей в том случае, когда сторона AC' треугольника $AC'P$ будет наибольшей, т. е. когда $AC' = AD + DC'$, $\angle ADC' = \angle D + \angle B = 180°$, и *вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.*

С другой стороны, известно, что всегда *существует единственный четырехугольник, стороны которого, взятые в определенном порядке, имеют наперед заданные длины a, b, c, d* [1]) *и который мож-*

[1]) Разумеется, a, b, c, d должны быть таковы, чтобы вообще мог существовать четырехугольник с этими длинами сторон (для чего необходимо, чтобы наибольший из отрезков a, b, c, d был меньше суммы трех других).

но вписать в круг. Построение этого четырехугольника нетрудно усмотреть из вышеприведенных рассуждений: отложим $AB = a$; зная отрезки $AP = AB - C'D'$, $PC' = BD' = BC + A'D'$ и $AC' = AD + B'C'$, мы сразу можем построить точку C', а следовательно, и найти вершину D четырехугольника $ABCD$. При этом в условии нашей задачи нет необходимости требовать, чтобы порядок сторон в четырехугольнике $ABCD$ был определен (предположение, из которого мы исходили в нашем решении): если в каком-либо четырехугольнике $KLMN$ стороны следуют, например, в порядке $KL = a$, $LM = d$, $MN = b$, $NK = c$, то площадь его меньше площади четырехугольника $K_0L_0M_0N_0$ ($K_0L_0 = a$, $L_0M_0 = d$, $M_0N_0 = b$, $N_0K_0 = c$), который можно вписать в круг, а площадь последнего четырехугольника (про который мы считаем, что центр O описанной окружности расположен внутри него) равна площади четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, который можно вписать в тот же круг с центром O, ибо

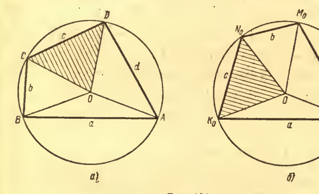


Рис. 131.

четырехугольники $A_0B_0C_0D_0$ и $ABCD$ состоят из одинаковых треугольников ($\triangle OK_0N_0 = \triangle OCD$, и т. д. — см. рис. 131, *а*, *б*), только по разному сложенных[1]).

Второе решение (ср. с первым решением задачи 70 а)). Рассмотрим два четырехугольника с одинаковыми сторонами: четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность S радиуса R с центром O, и другой четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (см. схематический рис. 132, *а*, *б*). Представим себе, что четырехугольник $ABCD$ шарнирный и что мы деформируем его, меняя углы так, чтобы он перешел в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. При этом равнобедренные треугольники ABO, BCO, CDO и DAO, построенные на сторонах четырехугольника $ABCD$, меняют свое положение и окончательно

---

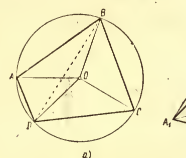
[1]) Можно доказать (см. решение задачи 74 б)), что *площадь четырехугольника со сторонами длин a, b, c и d, который можно вписать в круг, равна* $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, *где p — полупериметр четырехугольника*; отсюда также следует, что эта площадь не зависит от порядка расположения сторон.

занимают положение $A_1B_1O_1$, $B_1C_1O_2$, $C_1D_1O_3$ и $D_1A_1O_4$ (рис. 132, *б*). Сравним площади четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Мы имеем

$$S_{ABO}=S_{A_1B_1O_1},\ S_{BCO}=S_{B_1C_1O_2},\ S_{CDO}=S_{C_1D_1O_3},\ S_{DAO}=S_{D_1A_1O_4}.$$

Соединим точки O_1 и O_2, O_2 и O_3, O_3 и O_4, O_4 и O_1 окружностями радиуса R с центрами соответственно в точках B_1, C_1, D_1 и A_1. Докажем, что *два противоположных угла четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ меньше соответствующих углов четырехугольника $ABCD$, а остальные два угла — больше соответствующих углов $ABCD$.* Предположим, например, что $\angle A_1 < \angle A$; в таком случае из сравнения треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ (где $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$)



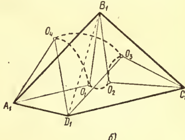


Рис. 132.

вытекает, что $B_1D_1 < BD$, а тогда из сравнения треугольников DBC и $D_1B_1C_1$ заключаем, что $\angle C_1 < \angle C$. Далее, все углы четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ не могут быть меньше соответствующих углов четырехугольника $ABCD$; если же предположить, что, например, $\angle B_1 > \angle B$, то $A_1C_1 > AC$ (вытекает из сравнения треугольников BAC и $B_1A_1C_1$) и $\angle D_1 > \angle D$ (вытекает из сравнения треугольников DAC и $D_1A_1C_1$). Таким образом,

$$\angle A_1 = \angle O_1A_1B_1 + \angle O_4A_1D_1 - \angle O_1A_1O_4 =$$
$$= \angle OAB + \angle OAD - \angle O_1A_1O_4 = \angle A - \angle O_1A_1O_4.$$

Аналогично

$$\angle B_1 = \angle B + \angle O_1B_1O_2,\quad \angle C_1 = \angle C - \angle O_2C_1O_3,$$
$$\angle D_1 = \angle D + \angle O_3D_1O_4.$$

Но так как

$$(\angle A - \angle A_1) + (\angle C - \angle C_1) = (\angle B_1 - \angle B) + (\angle D_1 - \angle D)$$

(ибо $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = 360°$), то

$$\angle O_1A_1O_4 + \angle O_2C_1O_3 = \angle O_1B_1O_2 + \angle O_3D_1O_4$$

и, следовательно,

$$S_{\text{сект. } A_1O_1O_4} + S_{\text{сект. } C_1O_2O_3} = S_{\text{сект. } B_1O_1O_2} + S_{\text{сект. } D_1O_3O_4}.$$

Так как разность

$$S_{ABCD}-S_{A_1B_1C_1D_1}=(S_{A_1B_1O_1}+S_{B_1C_1O_2}+S_{C_1D_1O_3}+S_{D_1A_1O_4})-S_{A_1B_1C_1D_1}=$$
$$=S_{A_1B_1O_1}+S_{B_1C_1O_2}+S_{C_1D_1O_3}+S_{D_1A_1O_4}-S_{A_1B_1C_1D_1}+$$
$$+S_{\text{сект. } A_1O_1O_4}-S_{\text{сект. } B_1O_1O_2}+S_{\text{сект. } C_1O_2O_3}-S_{\text{сект. } D_1O_3O_4},$$

как видно из рис. 132, *б*, равна площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$, ограниченного четырьмя дугами окружностей, то для доказательства того, что

$$S_{ABCD}>S_{A_1B_1C_1D_1}$$

(а именно это и составляет содержание нашей задачи), достаточно показать, что *площадь этого дугового четырехугольника* $O_1O_2O_3O_4$ *всегда будет положительной.*

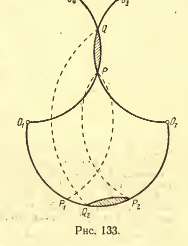


Рис. 133.

Последнее утверждение имеет следующий смысл. Заранее мы не можем быть уверены, что дуги O_1O_4 и O_2O_3 не пересекутся, т. е. что наш дуговой четырехугольник не будет иметь вида, изображенного на рис. 133. В этом случае «двуугольник» PQ будет вычитаться из общей площади, так как он будет входить и в сектор $A_1O_1O_4$, и в сектор $C_1O_2O_3$. Нам надо доказать, что площадь этого двуугольника никогда не может превзойти суммы площадей дуговых треугольников O_1O_2P и O_3O_4Q; именно это мы имели в виду, говоря о положительности площади дугового четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ (ибо в случае, когда четырехугольник имеет такой вид, как изображено на рис. 133, за площадь его следует принять число $S_{O_1O_2P}+S_{O_3O_4Q}-S_{PQ}$).

Заметим, что все дуги O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 и O_4O_1 имеют один и тот же радиус R и $\frown O_1O_2+\frown O_3O_4=\frown O_1O_4+\frown O_2O_3$ (ибо $\angle O_1B_1O_2+\angle O_3D_1O_4=\angle O_1A_1O_4+\angle O_2C_1O_3$). Таким образом

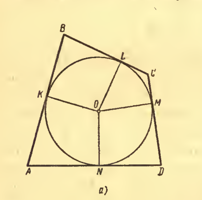
$$(\frown O_1O_2+\frown O_3O_4)-(\frown O_1O_4+\frown O_2O_3)=$$
$$=(\frown O_1O_2-\frown O_1P-\frown O_2Q)+(\frown O_3O_4-\frown O_3P-\frown O_4Q)=0;$$

поэтому хоть одно из выражений $\frown O_1O_2-\frown O_1P-\frown O_2Q$ и $\frown O_3O_4-\frown O_3P-\frown O_4Q$, неотрицательно. Предположим, что неотрицательно первое. Повернем дугу O_1P вокруг O_1 в положение O_1P_1, а дугу O_2Q и «двуугольник» PQ вокруг O_2 в положение $O_2P_2Q_2$ (рис. 133); при этом будем иметь $\frown O_1P_1+\frown O_2Q_2=\frown O_1P+\frown O_2Q\leqslant\frown O_1O_2$. Отсюда следует, что «двуугольник» P_2Q_2 не может пересекаться ни с дугой O_1P (он не пересекается с «кривым

сектором» O_1P_1P), ни с дугой O_2P (он не пересекается с «кривым сектором» O_2P_2P); поэтому $S_{P_2Q_2} = S_{PQ} < S_{O_1O_2P}$ и тем более $S_{PQ} < S_{O_1O_2P} + S_{O_3O_4Q}$.

Этим и завершается доказательство.

70. а) Первое решение (ср. со вторым решением задачи 69). Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, описанный вокруг окружности s радиуса r с центром O, и другой четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, имеющий те же самые углы и тот же периметр (рис. 134, *а*, *б*). Из точки O опустим перпендикуляры OK, OL, OM



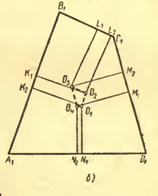


Рис. 134.

и ON на стороны четырехугольника $ABCD$ и рассмотрим четырехугольники $A_1N_1O_1K_2 = ANOK$, $B_1K_1O_2L_2 = BKOL$, $C_1L_1O_3M_2 = CLOM$ и $D_1M_1O_4N_2 = DMON$, углы A_1, B_1, C_1 и D_1 которых совпадают с углами четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Очевидно, что если $A_1B_1 > AB$, то $A_1D_1 < AD$ (для доказательства достаточно наложить друг на друга четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы их углы A и A_1 совпали); в этом случае будем иметь также $B_1C_1 < BC$, $C_1D_1 > CD$. Так как периметры четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны, то

$$AB + BC + CD + DA = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1;$$
$$(A_1B_1 - AB) + (C_1D_1 - CD) = (BC - B_1C_1) + (DA - D_1A_1),$$

или, другими словами,

$$(A_1B_1 - A_1K_2 - B_1K_1) + (C_1D_1 - C_1M_2 - D_1M_1) = \\ = (B_1L_2 + C_1L_1 - B_1C_1) + (A_1N_1 + D_1N_2 - D_1A_1),$$

т. е.

$$K_1K_2 + M_1M_2 = L_2L_1 + N_2N_1.$$

Но это означает, что

$$S_{K_1K_2O_1O_2} + S_{M_1M_2O_3O_4} = S_{L_2L_1O_3O_2} + S_{N_2N_1O_1O_4},$$

так как все эти четырехугольники — прямоугольники с одинаковой высотой r. Теперь из рис. 134, *б* видно, что

$$S_{ABCD} - S_{A_1B_1C_1D_1} =$$
$$= (S_{A_1N_1O_1K_2} + S_{B_1K_1O_2L_2} + S_{C_1L_1O_3M_2} + S_{D_1M_1O_4N_2}) - S_{A_1B_1C_1D_1} +$$
$$+ (S_{K_1K_2O_1O_2} - S_{L_2L_1O_3O_2} + S_{M_1M_2O_3O_4} - S_{N_2N_1O_1O_4}) = S_{O_1O_2O_3O_4},$$

откуда и следует, что

$$S_{ABCD} > S_{A_1B_1C_1D_1}.$$

Второе решение. Примем известный нам периметр искомого четырехугольника $ABCD$ за единицу, и пусть $A'B'C'D'$ — какой-либо четырехугольник, подобный $ABCD$. Тогда площадь $ABCD$ равна отношению $\frac{S}{p^2}$ площади четырехугольника $A'B'C'D'$ к квадрату его периметра (ибо коэффициент подобия четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равен отношению их периметров, т. е. $\frac{1}{p}$, а площадь $ABCD$ равна площади $A'B'C'D'$, умноженной на квадрат коэффициента подобия, т. е. равна $S \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{S}{p^2}$), — и наша задача сводится к тому, чтобы *найти тот из четырехугольников, имеющих наперед заданные углы, для которого отношение площади к квадрату периметра имеет наибольшее возможное значение.* Нам требуется доказать, что искомым будет четырехугольник $ABCD$, который *можно описать около окружности.*

Построим треугольник ABF, два угла которого равны углам A и B искомого четырехугольника [1]). Нам надо пересечь этот треугольник прямой CD данного направления так, чтобы у получившегося четырехугольника $ABCD$ отношение площади к квадрату периметра было возможно большим. Впишем в треугольник ABF окружность с радиусом r и центром O и проведем прямую CD заданного направления таким образом, чтобы она касалась этой окружности

---

[1]) Такой треугольник невозможно построить лишь в том случае, когда сумма каждых двух соседних углов четырехугольника $ABCD$ равна 180°. В этом исключительном случае теорема настоящей задачи принимает вид: *доказать, что из всех параллелограммов с данным острым углом и данным периметром p наибольшую площадь имеет ромб*; но это следует из того, что площадь параллелограмма со сторонами x и $c - x$ (где c — полупериметр параллелограмма) и острым углом α, равная

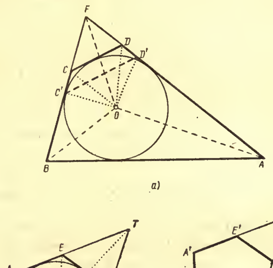
$$x(c-x)\sin\alpha = \left[\frac{c^2}{4} - \left(\frac{c}{2} - x\right)^2\right]\sin\alpha,$$

будет наибольшей при $x = c - x = \frac{c}{2}$.

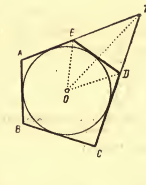
(рис. 135, *а*). Докажем, что *четырехугольник ABCD обладает требуемым свойством*, т. е. что если $C'D'$ — произвольная прямая, параллельная CD, то

$$\frac{S_{ABCD}}{(AB+BC+CD+DA)^2} \geqslant \frac{S_{A'B'C'D'}}{(AB+BC'+C'D'+D'A)^2}. \qquad (*)$$

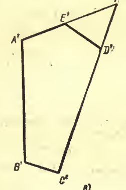
Обозначим коэффициент подобия треугольников FCD и $FC'D'$



а)



б)



в)

Рис. 135.

через k (k может быть больше или меньше единицы). Очевидно, что

$$S_{ABF} = S_{OAB} + S_{OAF} + S_{OBF} = \frac{1}{2} r (AB + BF + FA),$$

$$S_{CDF} = S_{ODF} + S_{OFC} - S_{OCD} = \frac{1}{2} r (FD + FC - DC)$$

и

$$S_{C'D'F}=k^2S_{CDF}=\frac{1}{2}rk^2(FD+FC-DC).$$

Отсюда

$$S_{ABCD}=S_{ABF}-S_{CDF}=\frac{1}{2}r[(AB+BF+FA)-(FD+FC-DC)]$$

и

$$S_{ABC'D'}=S_{ABF}-S_{C'D'F}=$$
$$=\frac{1}{2}r[(AB+BF+FA)-k^2(FD+FC-DC)]$$

или, если обозначить $AB+BF+FA$ через $2p$, а $CF+FD-DC$ — через $2q$:

$$S_{ABCD}=r(p-q),$$
$$S_{ABC'D'}=r(p-k^2q).$$

Далее, из подобия треугольников CDF и $C'D'F$ следует

$$C'F+FD'-D'C'=2kq,$$

откуда

$$AB+BC+CD+DA=$$
$$=AB+BF+FA-(CF+FD-CD)=2(p-q),$$
$$AB+BC'+C'D'+D'A=$$
$$=AB+BF+FA-(C'F+FD'-C'D')=2(p-kq).$$

В силу этого неравенство (*) принимает следующий вид:

$$\frac{r(p-q)}{4(p-q)^2}\geqslant\frac{r(p-k^2q)}{4(p-kq)^2},$$

откуда

$$\frac{1}{p-q}\geqslant\frac{p-k^2q}{(p-kq)^2}.$$

Перенося оба члена неравенства в левую часть и умножая его на (положительное) число $(p-q)(p-kq)^2$, получим

$$(p-kq)^2-(p-q)(p-k^2q)\geqslant 0,$$

что по раскрытии скобок и упрощении дает

$$(1-k)^2pq\geqslant 0,$$

а это последнее неравенство, очевидно, справедливо. Этим и завершается доказательство.

б) Решение этой задачи аналогично второму решению задачи а). Рассмотрим сначала, для простоты, случай пятиугольника, и пусть $M=ABCDE$ и $M'=A'B'C'D'E'$ — два пятиугольника с периметрами P и P' и площадями S и S', имеющие равные углы, причем M описан вокруг окружности s радиуса r, а M' не подобен M (рис. 135, *б*, *в*). Для того чтобы доказать неравенство

$$\frac{S}{P^2}>\frac{S'}{P'^2}, \qquad (**)$$

отбросим соответствующие стороны DE и $D'E'$ пятиугольников M и M' (такие, что $\angle D + \angle E = \angle D' + \angle E' > 180°$) и продолжим примыкающие к DE и к $D'E'$ стороны до их пересечения. При этом мы получим два четырехугольника $ABCT$ и $A'B'C'T'$ с соответственно равными углами, причем четырехугольник $ABCT$ описан вокруг окружности s. Для упрощения выкладок будем считать, что размеры исходных пятиугольников выбраны так, что рассматриваемые четырехугольники имеют одинаковые периметры, равные P_1 (выполнения этого условия всегда можно добиться, преобразовав, если надо, пятиугольник M' подобно). Ясно, что $S_{ABCT} = \frac{1}{2} rP_1$; обозначим еще $S_{A'B'C'T'} = \frac{1}{2} \alpha rP_1$, где α — некоторое положительное число $\left(\text{равное } \frac{S_{A'B'C'T'}}{S_{ABCT}}\right)$; в силу результата задачи а) $\alpha \leqslant 1$, причем $\alpha = 1$, лишь если $A'B'C'T'$ тоже описан вокруг окружности, т. е. если он равен $ABCT$. Далее обозначим $DT + TE - DE = p$ и $D'T' + T'E' - D'E' = kp$; здесь k — коэффициент подобия $\triangle D'E'T'$ и $\triangle DTE$. Так как (ср. с решением задачи а)) $S_{DTE} = \frac{1}{2} rp$, то $S_{D'T'E'} = \frac{1}{2} k^2rp$.

Далее имеем

$$S = S_M = S_{ABCT} - S_{DET};$$

$$P = AB + BC + CD + DE + EA = (AB + BC + CT + TA) - (DT + TE - DE)$$

и

$$S' = S_{M'} = S_{A'B'C'T'} - S_{D'E'T'};$$

$$P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A' = (A'B' + B'C' + C'T' + T'A') - (D'T' + T'E' - D'E').$$

Поэтому неравенство (**) принимает вид

$$\frac{\frac{1}{2} rP_1 - \frac{1}{2} rp}{(P_1 - p)^2} > \frac{\frac{1}{2} \alpha rP_1 - \frac{1}{2} k^2rp}{(P_1 - kp)^2},$$

или

$$\frac{1}{P_1 - p} > \frac{\alpha P_1 - k^2p}{(P_1 - kp)^2},$$

т. е.

$$(P_1 - kp)^2 > (P_1 - p)(\alpha P_1 - k^2p).$$

Но последнее неравенство действительно справедливо:

$$(P_1 - kp)^2 - (P_1 - p)(\alpha P_1 - k^2p) = (P_1 - kp)^2 - (P_1 - p)(P_1 - k^2p) + (1 - \alpha)(P_1 - p)P_1 = P_1p(1 - k)^2 + (1 - \alpha)(P_1 - p)P_1 > 0$$

(ср. решение задачи а)), так как $1-\alpha \geqslant 0$, а $P_1 > p$ по самому определению этих величин. В последнем неравенстве стоит знак $>$, а не $\geqslant$, так как, если $1-\alpha=0$, $\alpha=1$, то четырехугольники $A'B'C'T'$ и $ABCT$ равны; поэтому, для того чтобы пятиугольник M' был отличен от M, надо, чтобы $\triangle D'E'T'$ был отличен от $\triangle DTE$, т. е. чтобы было $k \neq 1$; таким образом, если $(1-\alpha)(P_1-p)P_1=0$, то $P_1p(1-k)^2$ наверное >0.

Решение задачи для случая произвольного n проводится методом математической индукции. Оно ничем не отличается от приведенного, и все выкладки имеют в точности такой же вид; только вместо пятиугольника надо всюду говорить об n-угольнике, а вместо четырехугольника — об $(n-1)$-угольнике, для которого, согласно предположению индукции, теорема считается уже доказанной (это позволяет утверждать, что $\alpha \leqslant 1$).

71. а) Если вписанный в окружность S n-угольник M *не является правильным*, то у него наверняка есть сторона, меньшая стороны a вписанного в S правильного n-угольника M_0. Далее, можно также считать, что M имеет и сторону, большую a: действительно, последнее не имеет места только в том случае, если M целиком вписан в дугу S, меньшую $\frac{1}{n}$-й части S; но тогда M заключается внутри сегмента, отсекаемого от ограниченного S круга стороной M_0, а в этом случае достаточно отразить симметрично этот сегмент от соответствующей стороны M_0, чтобы убедиться в справедливости неравенства $S_M < S_{M_0}$. Далее, не меняя площади вписанного в S многоугольника M, можно поменять его стороны местами так, чтобы самая большая и самая малая стороны M оказались рядом: в самом деле, перемена местами двух соседних сторон AB и BC вписанного в S многоугольника M не меняет площади $\triangle ABC$, ограниченного этими сторонами и диагональю n-угольника, а значит, не меняет площади M; применяя же это преобразование несколько раз, мы всегда можем сделать соседними две любые стороны M.

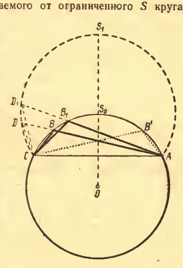


Рис. 136.

Рассмотрим теперь треугольник, ограниченный наибольшей стороной AB, наименьшей стороной BC и диагональю AC (может быть, предварительно преобразованного) многоугольника M и заменим его на $\triangle AB_1C$, где сторона $AB_1 = a$. Мы утверждаем, что $S_{AB_1C} > S_{ABC}$; в самом деле, из рис. 136 сразу видно, что точка B_1 расположена ближе к середине S_0 дуги ABC, чем точка B, и значит, $\triangle AB_1C$ имеет большую высоту, чем $\triangle ABC$. Таким образом, от многоугольника M мы переходим к многоугольнику M_1, одна сторона которого будет уже равна a; при этом $S_{M_1} > S_M$.

Далее, если M_1 отличен от M_0, то мы преобразуем его описанным способом в новый многоугольник M_2, имеющий больше равных a сторон, чем M_1 и такой, что $S_{M_2} > S_{M_1}$. Производя эти преобразования несколько раз, мы придем к многоугольнику M_0, причем в процессе преобразования многоугольников их площади будут лишь возрастать; поэтому $S_{M_0} > S_M$.

б) Решение задачи практически не отличается от решения задачи а); единственное различие состоит в доказательстве того, что при замене $\triangle ABC$ на $\triangle AB_1C$ (см. рис. 136) *периметр* многоугольника увеличивается. Отложим на продолжениях AB и AB_1 отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C$ (соответствующие построения воспроизведены на рис. 136 пунктиром). Так как $\angle ABC$ и $\angle AB_1C$ — внешние углы равнобедренных треугольников DBC и D_1B_1C, то

$$\angle ADC = \angle AD_1C = \frac{1}{2} \angle ABC \left(= \frac{1}{2} \angle AB_1C\right);$$

поэтому точки D и D_1 принадлежат построенной на отрезке AC как на хорде дуге окружности, вмещающей $\frac{1}{2} \angle ABC$, и при изображенном на рис. 136 расположении сторон $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$ хорда AD_1 будет ближе к центру S_0 этой дуги, чем хорда AD, откуда и следует, что

$$AB_1 + B_1C = AD_1 > AD = AB + BC.$$

72. а) Одно из самых изящных п р я м ы х доказательств[1]) нужного нам результата таково. Пусть M и M_0 — неправильный и правильный n-угольники, описанные вокруг одной и той же окружности s; обозначим еще через K описанный вокруг M_0 круг и через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — сегменты круга K, отсекаемые от K сторонами n-угольника M_0 (рис. 137). В таком случае, очевидно,

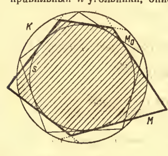


Рис. 137.

$$S_{M_0} = S_K - \left(S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2} + \ldots + S_{\sigma_n}\right).$$

С другой стороны (и это самое важное место всего рассуждения!), стороны M отсекают от K точно т а к и е ж е сегменты $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n$, которые, однако, могут и перекрываться. Обозначим пересечения сегментов σ'_1 и σ'_2, σ'_2 и σ'_3, σ'_3 и $\sigma'_4, \ldots$ (некоторые из этих пересечений могут и отсутствовать, т. е. иметь площадь 0) через $\sigma'_{12}, \sigma'_{23}, \sigma'_{34}, \ldots$ В таком случае общая площадь *части круга К, расположенной вне многоугольника М*, будет

[1]) О *прямых* и *косвенных* доказательствах теорем о максимумах и минимумах геометрических величин см., например, предисловие к книге [4]; к о с в е н н ы е доказательства теорем задач 71 и 72 имеются, например, в статье [1].

равна

$$\left(S_{\sigma_1'}+S_{\sigma_2'}+\ldots+S_{\sigma_n'}\right)-\left(S_{\sigma_{12}'}+S_{\sigma_{23}'}+\ldots+S_{\sigma_{n1}'}\right)$$

(ибо в сумме $S_{\sigma_1'}+S_{\sigma_2'}+\ldots+S_{\sigma_n'}$ части $\sigma_{12}', \sigma_{23}', \ldots$ круга K учитываются дважды), и значит, площадь части F многоугольника M, расположенной внутри K (эта фигура F заштрихована на рис. 137), будет равна

$$S_F=S_K-\left(S_{\sigma_1'}+S_{\sigma_2'}+\ldots+S_{\sigma_n'}\right)+\left(S_{\sigma_{12}'}+S_{\sigma_{23}'}+\ldots+S_{\sigma_{n1}'}\right)>$$
$$>S_K-\left(S_{\sigma_1}+S_{\sigma_2}+\ldots+S_{\sigma_n}\right)=S_{M_0}.$$

Таким образом, уже эта часть M (а тем более весь многоугольник M!) будет иметь площадь, превосходящую площадь S_{M_0} правильного n-угольника M_0.

Легко видеть, что равенство $S_F=S_{M_0}$ (и $S_M=S_{M_0}$) выполняется лишь тогда, когда все вершины многоугольника M принадлежат окружности круга K, т. е. только в случае $M\equiv M_0$.

б) Так как периметр P и площадь S многоугольника, описанного вокруг круга K радиуса r, связаны очевидным равенством $S=\frac{1}{2}Pr$, то результат задачи б) непосредственно вытекает из результата задачи а).

73. Из формул (см. стр. 65)

$$2nR\sin\frac{180^\circ}{n}\geqslant P \quad \text{и} \quad P\geqslant 2nr\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

где P — периметр n-угольника M, непосредственно следует, что

$$2nR\sin\frac{180^\circ}{n}\geqslant 2nr\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

т. е.

$$\frac{R}{r}\geqslant\left(\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\right):\left(\sin\frac{180^\circ}{n}\right)=\sec\frac{180^\circ}{n}$$

(где, очевидно, равенство имеет место лишь в случае правильного n-угольника M).

74. а) Эта несложная задача имеет много решений; вот одно из них[1]). По формуле Герона площадь S треугольника со сторонами a, b и c и полупериметром p равна

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Но так как

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=3p-2p=p,$$

[1]) Другие решения имеются, например, в книгах [27] и [29].

то по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом (ср. с решением задачи 39 или 43)

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3 = \frac{p^3}{27},$$

и следовательно,

$$S^2 \leqslant p \cdot \frac{p^3}{27} = \frac{p^4}{27}; \quad S \leqslant \frac{p^2\sqrt{3}}{9},$$

где равенство имеет место лишь в случае $p-a = p-b = p-c$, т. е. в случае $a = b = c$, — когда $\triangle ABC$ является *разносторонним*.

б) Эту задачу можно решить аналогично решению задачи а) [1]. Воспользуемся прежде всего результатом задачи 69, в силу которого каждый четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ имеет не большую площадь, чем четырехугольник $ABCD$ с теми же длинами сторон $AB = A_1B_1 = a$, $BC = B_1C_1 = b$, $CD = C_1D_1 = c$ и $DA = D_1A_1 = d$, который *можно вписать в окружность*. Поэтому мы можем с самого начала ограничиться лишь вписуемым в окружность четырехугольником $ABCD$. Найдем теперь формулу для площади S такого четырехугольника $ABCD$.

Обратимся к основному для первого решения задачи 69 рис. 130 (стр. 241), где теперь будем считать, что ADC' и BCD' — это не ломаные, а отрезки (так будет обстоять дело, если $ABCD$ *можно вписать в окружность* — см. первое решение задачи 69). Выше мы видели, что если $S_{ABCD} = S$, то

$$S_{ABD'C'} = \left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) S = \frac{a^2+c^2}{a^2} S;$$

таким образом, нам достаточно найти площадь трапеции $ABD'C'$.

Трапеция $ABD'C'$ состоит из треугольника APC' и параллелограмма $PBD'C'$ с общей высотой; поэтому

$$S_{PBD'C'} : S_{APC'} = 2BP : PA = 2D'C' \,(AB - D'C') = \left(2c \cdot \frac{c}{a}\right) : \left(a - c\frac{c}{a}\right) = \frac{2c^2}{a^2-c^2}$$

(здесь мы в соответствии с рис. 130 считаем, что $a > c$ [2]), — и следовательно, если обозначить $S_{APC'} = \Sigma$, то

$$\frac{a^2+c^2}{a^2} S = S_{ABD'C'} = \Sigma + \frac{2c^2}{a^2-c^2}\Sigma = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}\Sigma,$$

т. е.

$$S = \frac{a^2}{a^2-c^2}\Sigma.$$

Таким образом, задача будет решена, если мы выразим через a, b, c и d площадь Σ треугольника APC'.

---

[1] См. сноску на стр. 253.

[2] Если $a = c$, то роль сторон $AB = a$ и $CD = c$ четырехугольника $ABCD$ мы отводим сторонам $BC = b$ и $DA = d$, где, скажем, $b > d$; случай же $a = c$ и $b = d$, т. е. случай *прямоугольника $ABCD$*, является совсем простым.

Но стороны $\triangle APC'$ равны

$$AP = AB - D'C' = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} \ (= \alpha),$$

$$PC' = BD' = BC + A'D' = b + d\frac{c}{a} = \frac{ab + cd}{a} \ (= \beta),$$

$$AC' = AD + B'C' = d + b \cdot \frac{c}{a} = \frac{bc + da}{a} \ (= \gamma);$$

поэтому в силу формулы Герона

$$\Sigma = \sqrt{\pi(\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)},$$

где

$$\pi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{2a}[(a^2 - c^2) + (ab + bc + cd + da)] =$$

$$= \frac{1}{2a}[(a + c)(a - c) + (a + c)(b + d)] = \frac{a + c}{2a}(a + b - c + d),$$

и

$$\pi - \alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = \frac{1}{2a}[(ab + bc + cd + da) - (a^2 - c^2)] =$$

$$= \frac{1}{2a}[(a + c)(b + d) - (a + c)(a - c)] = \frac{a + c}{2a}(-a + b + c + d),$$

$$\pi - \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta) = \frac{1}{2a}[(a^2 - c^2) + (bc + ad - ab - cd)] =$$

$$= \frac{1}{2a}[(a + c)(a - c) + (d - b)(a - c)] = \frac{a - c}{2a}(a - b + c + d),$$

$$\pi - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) = \frac{1}{2a}[(a^2 - c^2) + (ab + cd - bc - ad)] =$$

$$= \frac{1}{2a}[(a + c)(a - c) + (b - d)(a - c)] = \frac{a - c}{2a}(a + b + c - d).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\Sigma = \frac{(a + c)(a - c)}{4a^2} \times$$

$$\times \sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)} =$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d) = \frac{1}{2}P$ — полупериметр $ABCD$. А поскольку $S = \frac{a^2}{a^2 - c^2}\Sigma$, то мы приходим к следующей (обобщающей формулу Герона [1])) *формуле для площади четырехугольника* $ABCD$,

[1]) Эта формула обращается в формулу Герона, когда, скажем, вершины D и A четырехугольника $ABCD$ сливаются, и поэтому $d = 0$.

который можно вписать в круг:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \qquad (*)$$

Дальнейшие рассуждения очень похожи на решение задачи а). Нам надо найти тот из четырехугольников $ABCD$ *с данным периметром* $2p$, который имеет н а и б о л ь ш у ю площадь; при этом можно заранее считать, что вокруг $ABCD$ можно описать окружность и что поэтому применима формула (*). Но так как

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d) =$$
$$= 4p-(a+b+c+d) = 4p-2p = 2p,$$

то, в силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом [1]):

$$xyzt \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4, \qquad (**)$$

имеем

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4}\right)^4 = \frac{P^4}{256},$$

и значит,

$$S < \frac{P^2}{16},$$

где равенство достигается только в том случае, когда у (вписуемого в окружность!) четырехугольника $ABCD$ все стороны равны:

$$p-a = p-b = p-c = p-d, \quad \text{т. е. } a = b = c = d,$$

другими словами, когда $ABCD$ — *квадрат*.

П р и м е ч а н и е. Для доказательства основной формулы (*) мы использовали описанное в решении задачи 69 построение. Однако эту формулу можно вывести и без привлечения чертежа и каких бы то ни было геометрических конструкций. В самом деле,

---

[1]) Так как $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \geqslant 0$, то $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xy$, т. е. $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, и аналогично $\frac{z+t}{2} \geqslant \sqrt{zt}$; далее, обозначая $\frac{x+y}{2} = u$ и $\frac{z+t}{2} = v$, получаем

$$\frac{x+y+z+t}{4} = \frac{u+v}{2} \geqslant \sqrt{uv} =$$
$$= \sqrt{\frac{x+y}{2}}\sqrt{\frac{z+t}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{xy}}\sqrt{\sqrt{zt}} = \sqrt[4]{xyzt},$$

что равносильно (**); равенство здесь достигается только при $x = y = z = t$.

для выпуклого четырехугольника со сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, углами A, B, C, D и площадью S, очевидно, имеем [1])

$$S = S_{ABD} + S_{DBC} = \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C,$$

т. е.

$$4S^2 = a^2d^2 \sin^2 A + b^2c^2 \sin^2 C + 2\, abcd \sin A \sin C.$$

Но так как в силу теоремы косинусов

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

и

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

то

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

т. е.

$$a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 2ad \cos A - 2bc \cos C.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 =$$

$$= a^2d^2 \cos^2 A + b^2c^2 \cos^2 C - 2abcd \cos A \cos C =$$
$$= a^2d^2 (1 - \sin^2 A) + b^2c^2 (1 - \sin^2 C) - 2abcd \cos A \cos C =$$
$$= a^2d^2 + b^2c^2 - [a^2d^2 \sin^2 A + b^2c^2 \sin^2 C + 2abcd \cos A \cos C) =$$
$$= a^2d^2 + b^2c^2 - [4S^2 + 2abcd (\cos A \cos C - \sin A \sin C)],$$

откуда следует, что

$$4S^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 - 2abcd \cos(A + C). \quad (***)$$

Если же четырехугольник $ABCD$ *может быть вписан в окружность*, то $A + C = 180^\circ$, т. е. $\cos(A + C) = -1$; поэтому здесь

$$16S^2 = 4(a^2d^2 + b^2c^2) - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 + 8abcd =$$
$$= 4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 =$$
$$= (a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2ad + 2bc)(-a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 2ad + 2bc) =$$
$$= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] =$$
$$= (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d),$$

что, разумеется, равносильно равенству (*).

75. Одно из самых красивых доказательств изопериметрической теоремы для (выпуклых) многоугольников связано с рассмотрением

---

[1]) Нетрудно видеть, что все приводящие к формуле (***) рассуждения (и сама эта формула) сохраняют силу и для невыпуклого многоугольника, — что, впрочем, для наших целей несущественно.

так изываемых «внутренних параллельных оболочек» многоугольника M. Сдвннем все стороны n-угольнника $M = M_0$ внутрь на одно н то жс (малое!) расстоянне δ; получеиные прямые образуют «внутреннюю параллельную оболочку» M_δ многоугольника M ширины δ (рис. 138, a). При этом оговорка о «малости» δ означает лишь, что мы будсм н е п р е р ы в н о сдвигать стороны M виутрь, наблюдая, как меняется при этом многоугольник M_δ (рнс. 138, $б$, $в$).

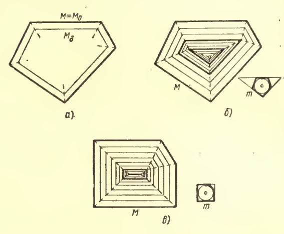


Рис. 138.

Ясио, что при увеличении δ вершины многоугольника M_δ будут перемещаться по биссектрнсам углов многоугольинка M (ибо каждая вершина M_δ равиоудалена от двух соседиих сторон M — см. рнс. 138, a); прн этом определениым «критическим» зиаченням δ будет отвечать слияиие двух вершин «виутренней оболочкн» M_δ многоугольника M, т. е. уменьшение чнсла сторои M_δ (на рис. 138 $б$, $в$; многоугольиики M_δ, отвечающие подобным «критическнм» значениям δ, изображеиы жнрными линиями). Прн этом «крайнее» значение δ, до которого мы можем дойтн, равно, очевидно, радиусу r Впиcанного круга многоугольиика M (ср. рис. 24, a на стр. 61); поэтому «оболочку» M_r можно иазвать «ядром» многоугольиика M. Нетрудио видеть, что «ядро» M_r многоугольинка M представляет собой точку O, если M нмеет е д и н с т в е н н ы й Впнсаиный круг k (точка O является центром круга k; в этом случае последний «истинный многоугольиик» M_δ является треугольнком или другим многоугольником, в который можно вписать круг, и O есть центр вписанной окружиости этого треугольнка; см. рис. 138, $б$) н M_r является отрезком O_1O_2, еслн M имеет м н о г о Вписаиных кругов (н центры этих кругов заполияют отрезок O_1O_2; в этом случае «оболочки» M_δ обязательио «перепрыгиут» тип треугольника; ср. рис. 138, $в$ с рис. 26 иа стр. 61).

Обозначим теперь через m многоугольннк, стороны которого параллельны сторонам данного многоугольиика M и касаются окружности радиуса 1; площадь S_m многоугольнника m мы обозиа-

чим через s. Докажем, что *для каждого* (*выпуклого*) *многоугольника* M

$$Pr - S - sr^2 \geqslant 0, \qquad (*)$$

где равенство имеет место лишь для многоугольников, все стороны которых касаются одной окружности, т. е. для многоугольников, *описанных вокруг окружности* (в школьном понимании этого термина); вывод этого неравенства представляет собой центральный пункт решения задачи. Для того чтобы установить справедливость (*), рассмотрим, *как меняется величина* $Pr - S - sr^2$ *при переходе от многоугольника* M *к его «внутренней параллельной оболочке»* M_δ, т. е. изучим значения

$$f(\delta) = P_\delta r_\delta - S_\delta - s_\delta r_\delta^2$$

интересующей нас величины, вычисленные для всех многоугольников M_δ, где $0 \leqslant \delta \leqslant r$.

Предположим прежде всего, что $M_1 \equiv M_{\delta_1}$ и $M_2 \equiv M_{\delta_2}$ — два многоугольника одного «слоя», т. е. такие, что им отвечает о д и н и т о т ж е многоугольник $m_{\delta_1} = m_{\delta_2} = m$ (на рис. 138, *б*, *в* «слои» многоугольников M_δ отделены друг от друга многоугольниками, изображенными жирными линиями). Обозначим отвечающие δ_1 и δ_2 значения функции $f(\delta)$ через

$$f(\delta_1) = f_1 = P_1 r_1 - S_1 - s_1 r_1^2 \quad \text{и} \quad f(\delta_2) = f_2 = P_2 r_2 - S_2 - s_2 r_2^2,$$

где в силу нашего предположения $s_1 = s_2 (= \sigma)$ [1]). Покажем, что если $\delta_2 - \delta_1 = \delta > 0$, то

$$S_1 = S_2 + P_2\delta + \sigma\delta^2 \quad \text{и} \quad P_1 = P_2 + \sigma \cdot 2\delta.$$

В самом деле, многоугольник M_1 получается из M_2 «надстройкой» на сторонах M_2 ряда прямоугольников ширины δ (общая площадь всех этих прямоугольников равна $P_2\delta$, а сумма всех их «внешних» сторон равна P_2) и, кроме того, еще примыкающих к вершинам M_2 «кусочков» многоугольника m', подобного m_1 с коэффициентом подобия δ (рис. 139). Все вместе эти «кусочки» составляют многоугольник m', так что их общая площадь равна площади s' многоугольника m', т. е. $\sigma \cdot \delta^2$, а сумма их «внешних» сторон равна периметру p' многоугольника m', т. е. $2\sigma\delta$: ведь так как многоугольник m' описан вокруг окружности радиуса δ, то его площадь s' и периметр p' связаны соотношением $s' = \frac{1}{2} p'\delta$. А так как, кроме того, очевидно,

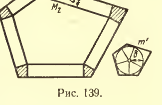


Рис. 139.

[1]) Разумеется, величина σ может и не равняться s (может быть б о л ь ш е s), ибо M_1 и M_2 могут принадлежать какому-то «внутреннему» слою многоугольников M_δ.

что

$$r_1 = r_2 + \delta$$

(почему?), то окончательно получаем

$$f_2 - f_1 = \left(P_2r_2 - S_2 - s_2r_2^2\right) - \left(P_1r_1 - S_1 - s_1r_1^2\right) =$$

$$= (P_2r_2 - S_2 - \sigma r_2^2) - (P_2 + 2\sigma\delta)(r_2 + \delta) +$$

$$+ (S_2 + P_2\delta + \sigma\delta^2) + \sigma(r_2 + \delta)^2 = 0.$$

Рассмотрим теперь, как меняется величина $f(\delta) = P_\delta r_\delta - S_\delta - s_\delta r_\delta^2$ при переходе через «критическое» значение δ, отвечающее «перестройке» многоугольника M_δ (а именно — уменьшению числа его сторон). Ясно, что при этом величины P_δ, r_δ и S_δ не претерпевают заметных изменений (ибо с ростом δ они меняются непрерывно); величина же s_δ меняется «скачком» (внезапно возрастая вследствие «перестройки» многоугольника m; см. те же рис. 138, *б*, *в*). Поэтому *величина* $f(\delta)$, *сохраняя свое значение в пределах каждого «слоя», при переходе от слоя к слою скачкообразно убывает*: график функции $f(\delta)$ имеет характер «ступенчатой» линии со ступеньками постоянной высоты, опускающейся при движении вдоль «оси δ» от $\delta = 0$ до $\delta = r$ (см. условный рис. 140).

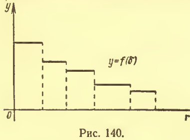


Рис. 140.

А так как значению $\delta = r$, т. е. «ядру» M_r многоугольника M, отвечает функция

$$f(r) = P_rr_r - S_r - s_rr_r^2 = 0$$

(ибо здесь, очевидно, $r_r = 0$ и $S_r = 0$, хотя, возможно, $P_r \neq 0$), то значению $\delta = 0$ (т. е. исходному многоугольнику M!) отвечает неотрицательная величина $f(\delta)$, т. е.

$$f(0) = Pr - S - sr^2 \geqslant 0,$$

что нам и требовалось доказать.

Ясно, что равенство в (*) имеет место лишь тогда, когда существует единственный «слой» многоугольников M_δ, т. е. когда все стороны M равноудалены от точки O, являющейся «ядром» M — когда M *описан вокруг окружности*.

Умножим теперь все члены неравенства (*) на (положительное) число $4s$:

$$4Psr - 4Ss - 4s^2r^2 \geqslant 0,$$

после чего преобразуем полученное неравенство так:

$$-4sS \geqslant -4Psr + 4s^2r^2,$$

или

$$P^2 - 4sS \geqslant P^2 - 4Psr + 4s^2r^2,$$

т. е.

$$P^2 - 4sS \geqslant (P - 2sr)^2; \qquad (**)$$

равенство здесь выполняется только для *описанных вокруг окружности* многоугольников. Отсюда, в частности, следует, что для каждого n-угольника M

$$P^2 - 4sS \geqslant 0, \qquad (***)$$

или, поскольку наибольшую площадь $n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ среди всех описанных около единичного круга n-угольников m имеет правильный n-угольник (см. задачу 72 а)),

$$\frac{P^2}{S} \geqslant 4s \geqslant 4n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \qquad (****)$$

где равенство имеет место только в том случае, когда n-угольник M описан вокруг окружности и когда отвечающий ему n-угольник m правильный, т. е. когда M — *правильный* n-угольник.

Примечание. Из неравенства (****), в частности, следует, что среди всех n-угольников с данными направлениями сторон наименьшее отношение $\frac{P^2}{S}$ (равное $4s$, т. е., как легко видеть, $=4\left(\operatorname{tg}\frac{A_1}{2} + \operatorname{tg}\frac{A_2}{2} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{A_n}{2}\right)$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — углы n-угольника) имеет *n-угольник, описанный вокруг окружности*:

$$\frac{P^2}{S} \geqslant 4\left(\operatorname{tg}\frac{A_1}{2} + \operatorname{tg}\frac{A_2}{2} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{A_n}{2}\right); \qquad (!)$$

это неравенство является усилением «изопериметрического неравенства» (****), ибо, как можно показать (ср. с задачей 72 б)); если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — углы (выпуклого) n-угольника, т. е. если $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = (n-2)180^\circ$, то

$$\operatorname{tg}\frac{A_1}{2} + \operatorname{tg}\frac{A_2}{2} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{A_n}{2} \geqslant n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

76. Мы уже неоднократно отмечали, что для правильного n-угольника

$$\frac{P}{S^2} = 4n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

(ср. стр. 67), а для n-угольника, отличного от правильного,

$$\frac{P^2}{S} > 4n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

С другой стороны, для круга площади $S = \pi r^2$ и периметра (длины окружности) $P = 2\pi r$, очевидно,

$$\frac{P^2}{S} = \frac{4\pi^2 r^2}{\pi r^2} = 4\pi.$$

Но поскольку (ср., например, стр. 64—65) число $n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ равно площади S правильного n-угольника m, описанного вокруг круга единичного радиуса, а π равно площади самого этого круга, то $4n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} > 4\pi$, откуда и следует, что для круга отношение $\frac{P^2}{S}$ меньше, чем для многоугольника.

77. а) Доказательство этого утверждения близко к решению задачи 75. Там мы видели, что $Pr - S - sr^2 \geqslant 0$ (неравенство (*) на стр. 259); здесь P, S и r — периметр, площадь и радиус Вписанного круга произвольного n-угольника M, а s — площадь n-угольника m, стороны которого параллельны сторонам M и касаются круга радиуса 1. Но так как, очевидно, площадь s многоугольника m больше площади π единичного круга (ср. с решением задачи 76), то тем более

$$Pr - S - \pi r^2 > 0. \qquad \text{(I)}$$

Преобразуя это неравенство в точности так же, как мы преобразовывали в решении задачи 75 неравенство (*) (т. е. умножая его на 4π, и т. д.), мы окончательно получим

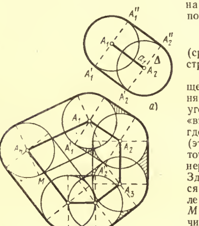


Рис. 141.

$$P^2 - 4\pi S > (P - 2\pi r)^2 \qquad \text{(II)}$$

(ср. с неравенством (**) на стр. 261).

б) В решении задачи а) существенную роль играла «внутренняя оболочка ширины δ» многоугольника M, а в конечном счете — «внутренняя оболочка ширины r», где r — радиус Вписанного круга (эта оболочка вырождалась в точку или в отрезок — см. вывод неравенства (*) на стр. 259). Здесь нам, напротив, понадобится «(внешняя) оболочка (в смысле Я. Штейнера) многоугольника M ширины Δ», где Δ — некоторое число, т. е. *совокупность всех точек, удаленных* (в смысле, указанном на стр. 15—16) *от M не больше чем на Δ*, в частности — внешняя оболочка ширины R, где R — радиус Описанного круга многоугольника M. Легко видеть, что (понимаемая в указанном смысле) «оболочка» ширины Δ стороны $A_1A_2 = a_1$ многоугольника M представляет собой прямоугольник $A_1'A_2'A_2''A_1''$ ширины 2Δ со средней линией A_1A_2, дополненный двумя полукругами радиуса Δ с центрами A_1 и A_2 (рис. 141, а); это описание можно даже принять за определение «оболочки» отрезка A_1A_2. Предположим теперь, что $\Delta = R$, и построим такие «оболочки» (ширины R) для всех сторон n-угольника M. Эти *n «оболочек сторон» полностью покры-*

вают внутренность M. В самом деле, последнее утверждение было бы верным даже и в том случае, если бы мы рассматривали не «оболочки сторон ширины R», но лишь «оболочки сторон ширины r» (а, разумеется, $r < R$!): ведь наличие не покрытой «оболочками» ширины r точки O доказывало бы, что расстояние O от всех сторон M больше r, т. е. что существует целиком заключенная внутри M окружность (с центром O) радиуса, большего r, — что, однако, противоречит определению величины r.

Ясно, что площадь изображенной на рис. 141, *а* фигуры, отвечающей стороне $A_1A_2 = a_1$ n-угольника, равна

$$a_1 \cdot 2\Delta + \pi\Delta^2;$$

таким образом, сумма площадей всех n «оболочек сторон» ширины R равна

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, 2R + n\pi R^2 = 2PR + n\pi R^2.$$

Поэтому, если обозначить через $s_1, s_2, \ldots, s_n$ площади частей $f_1, f_2, \ldots, f_n$ плоскости, покрытых нашими «оболочками» 1-кратно, 2-кратно, ..., n-кратно, то, поскольку в сумме $2PR + n\pi R^2$ площадей всех «оболочек сторон» области $f_1, f_2, \ldots, f_n$ учитываются 1 раз, 2 раза, ..., n раз, мы имеем

$$2PR + n\pi R^2 = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ns_n \qquad (1)$$

(при этом некоторые из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ могут, конечно, и равняться нулю).

Заметим теперь, что площадь всей «оболочки n-угольника M ширины R», очевидно, равна

$$S + PR + \pi R^2$$

(ф о р м у л а   Ш т е й н е р а). В самом деле, внешняя по отношению к M часть рассматриваемой фигуры F состоит из построенных на сторонах M прямоугольников ширины R и из секторов кругов радиуса R с центрами в вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n-угольника M. При этом сумма площадей прямоугольников, очевидно, равна $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)R = PR$. С другой стороны, вершине A_1 отвечает сектор круга с центральным углом $180° - \angle A$ (рис. 141, *б*) [1]), т. е. с центральным углом, равным *внешнему углу* n-угольника при вершине A_1; поэтому сумма всех центральных углов всех секторов равна сумме внешних углов n-угольника, т. е. равна 360°, и значит, сумма площадей всех секторов равна полной площади πR^2 круга радиуса R. А так как вся фигура F распадается на части $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то

$$S + PR + \pi R^2 = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n. \qquad (2)$$

Вычитая теперь (2) из (1), получим

$$PR + (n-1)\pi R^2 - S = s_2 + 2s_3 + \ldots + (n-1)s_n. \qquad (3)$$

Но (и вот тут нам впервые понадобится то, что ширина R «оболочки» F многоугольника M равна радиусу его Описанного круга!)

$$n\pi R^2 < s_2 + 2s_3 + \ldots + (n-1)s_n. \qquad (4)$$

[1]) Для наглядности на рис. 141, *б* изображена «внешняя оболочка» многоугольника M какой-то ширины $\Delta < R$.

В самом деле, область, образованная объединением n кругов радиуса R с центрами в вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n-угольника M, покрыта «оболочками сторон» n-угольника *не менее чем 2-кратно*: действительно, круг с центром A_1, очевидно, целиком вмещается в «оболочки» сторон A_1A_n и A_1A_2; круг с центром A_2 целиком вмещается в «оболочки» сторон A_2A_1 и A_2A_3, и т. д. При этом естественно, что часть F, покрытая сразу двумя кругами, входит в f_3 (или в f_4, или в $f_5, \ldots$, — так, область, покрытая кругами с центрами A_1 и A_2, входит в «оболочки» сторон A_1A_n, A_1A_2 и A_2A_3, а область, покрытая кругами с вершинами A_1 и A_3, если таковая существует, — в «оболочки» сторон A_1A_n, A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4); часть F, покрытая тремя кругами, входит в f_4 (или в $f_5, \ldots$), и т. д.; наконец, часть F, покрытая $(n-1)$ кругами (если такая часть F существует), входит в f_n. Что же касается до части F, покрытой нашими n кругами *n-кратно*, то таковая просто *отсутствует*: если бы существовала точка Q, покрытая всеми нашими n кругами, то эта точка отстояла бы от всех вершин многоугольника M на расстоянии $<R$; но в этом случае круг с центром Q и радиусом $<R$ целиком содержал бы внутри себя многоугольник M, — что, однако, противоречит определению величины R. Эти рассуждения и доказывают соотношение (4) (ср. с выводом формулы (1) [1]).

Вычитая теперь (4) из (3), получим

$$PR - S - \pi R^2 > 0 \qquad (*)$$

(ср. с неравенством (I) решения задачи а)), откуда последовательно получаем

$$4\pi PR - 4\pi S - 4\pi^2 R^2 > 0,$$

или

$$-4\pi S > -4\pi PR + 4\pi^2 R^2,$$

или

$$P^2 - 4\pi S > P^2 - 4\pi PR + 4\pi^2 R^2,$$

и, наконец,

$$P^2 - 4\pi S > (2\pi R - P)^2. \qquad (**)$$

78. а) Пусть A, B — две произвольные точки многоугольника M. Ясно, что можно найти две такие граничные точки A', B' многоугольника, что расстояние $A'B'$ не меньше AB: достаточно принять за A' и B' точки пересечения прямой AB с контуром многоугольника M. Далее, существуют две такие вершины A'', B'' многоугольника, что $A''B'' \geqslant A'B'$: в самом деле, если A' — точка стороны a многоугольника, то за A'' можно принять такую вершину M, что a проходит через A'' и угол $A''A'B'$ не острый. Точно так же и точку B', если только она отлична от вершины многоугольника, можно заменить вершиной B'' так, что $A''B'' \geqslant A''B'$.

Таким образом, расстояние между любыми двумя точками A и B многоугольника M не больше какой-либо из сторон или диагоналей многоугольника, откуда с очевидностью следует, что диамет-

[1] В (4) стоит знак $<$, а не $\leqslant$, ибо, как легко видеть, существуют принадлежащие f_2 (или f_3, или $f_4, \ldots$) участки, не покрытые ни одним из рассматриваемых кругов радиуса R (см. на рис. 141, б заштрихованную часть пересечения «оболочек» сторон A_1A_2 и A_2A_3 n-угольника M).

ром многоугольника является наибольшая из его диагоналей или наибольшая сторона.

б) Решение аналогично решению задачи а) и предоставляется читателю.

79. Обозначим диаметр четырехугольника через d; так как площадь S (выпуклого или невыпуклого!) четырехугольника равна $\frac{1}{2}ef\sin\alpha$, где e и f — длины его диагоналей, а α — угол между диагоналями (ср. решение задачи 45 а)), то

$$S \leqslant \frac{1}{2}d^2$$

(ибо $e \leqslant d$, $f \leqslant d$ и $\sin\alpha \leqslant 1$); следовательно, если $S = 1$, то $d^2 \geqslant 2$ и $d \geqslant \sqrt{2}$. Равенство $d = \sqrt{2}$ выполняется для *квадрата* площади 1 (или для любого четырехугольника, *диагонали которого* взаимно *перпендикулярны и равны* между собой, а все стороны не превосходят диагоналей).

С другой стороны, диаметр d четырехугольника (параллелограмма) площади 1 может быть сколь угодно велик (пример: прямоугольник со сторонами длин N и $1/N$, где N — велико). Поэтому возможные значения d таковы:

$$\sqrt{2} \leqslant d < \infty.$$

80. Пусть A_1 и A_2 — две наиболее удаленные друг от друга вершины М; $A_1A_2 = D$ — диаметр М (см. задачу 78). Проведем через все вершины многогранника перпендикулярные A_1A_2 плоскости; ясно, что «крайними» из них будут плоскости π_1 и π_2, проходящие через A_1 и A_2 (ибо если бы М содержал точку B, расположенную, скажем, по другую сторону от π_2, чем A_1, то было бы $A_1B > A_1A_2 = D$). Проведенные плоскости разобьют поверхность М на ряд слоев. Каждый из этих слоев состоит минимум из трех кусков граней (некоторые из них могут оказаться и целыми гранями), разграниченных между собой отрезками ребер М (может быть, целыми ребрами); ясно, что в каждом слое будет не меньше трех таких отрезков ребер, ведущих от одной из наших плоскостей к следующей плоскости. А так как длина такого отрезка ребра не меньше расстояния между плоскостями, то сумма длин всех «поперечных» (т. е. не параллельных проведенным плоскостям) ребер М не меньше утроенного расстояния между крайними плоскостями, т. е. $\geqslant 3D$; при этом равенство здесь невозможно (почему?).

81. Первое решение. Проведем через «внутренний угол» M канала окружность, касающуюся ее «внешних» берегов в точках A_0 и B_0 (рис. 142, *а*); ясно, что радиус $R = OA_0 = OM = OB_0$ этой окружности определяется из соотношения (заметьте, что сторона квадрата $OaMb$ равна $R - 1$)

$$2(R-1)^2 = R^2, \quad \text{откуда} \quad R = 2 + \sqrt{2}\,(\approx 3{,}41),$$

и значит

$$A_0B_0 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2 \quad (\approx 4{,}83).$$

Нетрудно понять, что ветка, имеющая форму дуги окружности $\smile A_0B_0$ проплыть через поворот канала сможет: ведь при повороте

вокруг точки O на 45° в одну или в другую сторону $\smile A_0B_0$ занимает положение $\smile A_0'M$, соответственно $\smile MB_0'$ (рис. 142, *а*) — и в обоих этих положениях ветка далее может свободно двигаться по одному или другому колену канала.

Докажем теперь, что *если диаметр ветки* $AB = d > 2\sqrt{2} + 2$, *то какую бы форму эта ветка ни имела, она* н е   с м о ж е т *проплыть через поворот канала.* В самом деле, если ветка расположена

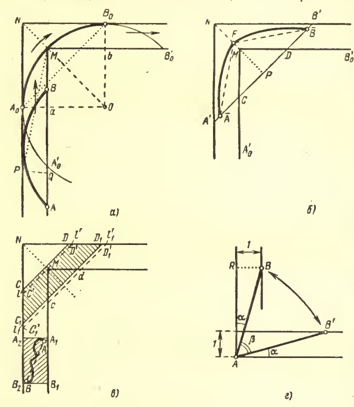


Рис. 142.

в прямолинейном участке канала с берегом MA_0' и если ее конец B расположен ближе к повороту канала, чем конец A [1]), то (направ-

[1]) Мы можем считать концы A и B диаметра AB ветки конечными ее точками, для чего достаточно просто «обломать» ветку; ниже будет показано, что даже часть AB ветки неизбежно застрянет в повороте канала.

линый) отрезок $\overline{AB}$ (длина которого превосходит $2\sqrt{2}+2$) составляет с «биссектрисой» $\overline{MN}$ канала (т. е. с общей биссектрисой образованных обоими берегами канала углов) обязательно **т у п о й** угол. В самом деле, если сдвинуть параллельно ветку в такое положение A_1B_1, чтобы конец B_1 совпал с M, то конец A_1 отрезка B_1A_1 займет положение на изображенной на рис. 142, *а* пунктиром дуге PQ окружности радиуса $d>2\sqrt{2}+2$ с центром M. Но если $A_1 \in \smile PQ$, то $\angle A_1MA < 45°$ (ибо даже наибольшее из возможных значений этого угла, а именно $\angle PMQ$, будет $<45°$, так как $PM > 2\sqrt{2}+2>\sqrt{2}$), и значит, $\angle NMA_1 > 90°$. Аналогично этому, когда ветка после поворота будет плыть по второму «колену» канала, то она займет положение A_2B_2, где уже точка A_2 будет расположена ближе к повороту, чем B_2 (ибо «перевернуться» и плыть далее другим концом вперед ветка диаметра $>\sqrt{2}$, разумеется, не сможет); при этом угол между $\overline{B_2A_2}$ и $\overline{MN}$ также будет тупым, а угол между $\overline{A_2B_2}$ и $\overline{MN}$ (обратите внимание на направление отрезков!) — острым. Но так как в процессе движения ветки по реке угол между $\overline{AB}$ и $\overline{MN}$ меняется **н е п р е р ы в н о**, то ветка обязательно должна будет пройти через такое положение $\bar{A}\bar{B}$, при котором мы будем иметь $\angle(\bar{A}\bar{B}, MN)=90°$, т. е. $\bar{A}\bar{B} \perp MN$ [1]).

Пусть C и D — точки пересечения отрезка $\overline{AB}$ с берегами MA_0' и MB_0' реки (рис. 142, *б*). Так как $C\bar{A} \leqslant CA' = \sqrt{2}$ и $D\bar{B} < \sqrt{2}$, то

$$CD = \bar{A}\bar{B} - \bar{A}C - D\bar{B} > (2\sqrt{2}+2) - \sqrt{2} - \sqrt{2} = 2.$$

Отсюда следует, что если MP — расстояние от M до $\bar{A}\bar{B}$, то

$$MP = \frac{1}{2}CD > 1,$$

и тем более >1 расстояние FP до $\bar{A}\bar{B}$ от точки F пересечения ветки $\bar{A}\bar{B}$ с отрезком MN.

Представим теперь ветку $\bar{A}\bar{B}$ плывущей по одному из прямолинейных рукавов канала. В таком случае все точки $\bar{A}$, $\bar{B}$ и F будут находиться внутри канала (который здесь можно понимать просто как полосу ширины 1, ограниченную параллельными прямыми); поэтому внутри канала будет находиться и весь $\triangle \bar{A}\bar{B}F$ (в силу *выпуклости* полосы; см. определение на стр. 56). Но это невозможно, так как (понимаемая в смысле данного на стр. 92 определения) **ш и р и н а** тупоугольного треугольника $\bar{A}\bar{B}F$ (а тупым является уже $\angle \bar{A}M\bar{B}$, который меньше $\angle \bar{A}F\bar{B}$), т. е. *ширина самой узкой полосы, в которую можно заключить этот треугольник*, равна его наименьшей высоте, т. е. равна $FP>1$. А отсюда следует, что ветка $\bar{A}\bar{B}$ уже по каналу ширины 1 проплыть не сможет.

В т о р о е р е ш е н и е. Эту задачу можно также решить аналогично решению (близкой к ней по сюжету) задачи 49. Возможность проплыть для ветки диаметра $2\sqrt{2}+2$ устанавливается легко (см. первое решение); основная трудность заключается в том, чтобы установить, что никакая ветка диаметра $d=AB>2\sqrt{2}+2$

[1]) Ср. подстрочное примечание на стр. 303.

не сможет проплыть поворот канала, не застряв в нем. Представим себе теперь жестко связанный с веткой AB и заключающий ветку внутри себя прямоугольник $\Pi \equiv A_1B_1B_2A_2$ ширины 1, две стороны которого лежат на берегах канала (рис. 142, *в*), и будем следить за движением этого прямоугольника в процессе движения ветки. Как и в первом решении показывается, что при движении ветки вперед и развороте ветки отрезок AB, а с ним и прямоугольник Π, повернется более чем на $45°$ [1]). Сосредоточим теперь внимание на том моменте в процессе движения ветки, когда *стороны* A_1B_1 *и* A_2B_2 *прямоугольника* Π *окажутся перпендикулярными «биссектриссе канала»* NM.

Проведем через точку M прямую $C'D' = l' \perp MN$ и по другую сторону от нее, чем точка N, — прямую $C_1'D_1' = l_1' \parallel l'$, удаленную от l' на расстояние 1. Если диаметр AB ветки $> 2\sqrt{2} + 2$, то в рассматриваемый момент найдется точка ветки, расположенная в треугольнике $C'ND'$: ведь диаметр каждого из изображенных на рис. 142, *в* ромбов $C_1'cMC'$ и $D_1'dMD'$ равен $C_1'M = D_1'M = \sqrt{6} > 2\sqrt{2} + 2$ (почему?), — и ветка никак не сможет поместиться в одном из этих двух ромбов. Но в таком случае прямоугольник Π в этот момент расположится между какими-то двумя прямыми l и l_1, параллельными прямым $l' \parallel l_1'$ и удаленными друг от друга на то же расстояние 1; эти прямые на рис. 142, *в* расположены выше прямых l', соответственно l_1'. Прямоугольник Π может при этом, разумеется, и выйти за пределы канала; но если наша ветка плывет по каналу, то она обязательно будет заключена внутри образованной прямыми l и l_1 с «внешними» берегами канала трапеции C_1D_1DC. Однако диаметр трапеции C_1D_1DC меньше диаметра трапеции $C_1'D_1'D'C'$, образованной с теми же берегами канала прямыми l' и l_1' (легко видеть, что C_1D_1DC можно поместить внутрь $C_1'D_1'D'C'$), а последний, как нетрудно видеть, равен $C_1'D_1' = 2\sqrt{2} + 2$. Этим и доказывается, что ветка диаметра $d > 2\sqrt{2} + 2$ проплыть по каналу не сможет (ибо она не поместится внутри трапеции C_1D_1DC!).

82. а) $n = 2,3$. Ясно, что система двух или трех точек, расстояние между каждыми двумя из которых не меньше 1, *имеет диаметр* $\geqslant 1$: если расстояние между двумя точками, или все попарные расстояния между тремя точками, равны 1, то диаметр системы точек равен 1.

б) $n = 4$. Четыре точки на плоскости или являются вершинами выпуклого четырехугольника (рис. 143, *а*) или три из них образуют треугольник, внутри которого расположена четвертая точка

---

[1]) Вот еще одно доказательство этого: ясно, что наименьший угол, на который может повернуться отрезок AB, не меньше изображенного на рис. 142, *г* угла $\beta = 90° - 2\alpha$, а

$$\sin\beta = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha > 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}+2}\right)^2 > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(рис. 143, *б*). В первом случае хотя бы один из углов четырехугольника, скажем угол $A_1A_2A_3$, будет не меньше 90°. Отложим на сторонах A_2A_1 и A_2A_3 этого угла отрезки $A_2A_1' = A_2A_3' = 1$; тогда $A_1'A_3' \leqslant \leqslant A_1A_3$. Но если $A_2A_1' = A_2A_3' = 1$ и $\angle A_1'A_2A_3' \geqslant 90°$, то $A_1'A_3' \geqslant \sqrt{2}$ (теорема о третьих сторонах двух треугольников с двумя соответственно равными сторонами); поэтому и $A_1A_3 \geqslant \sqrt{2}$. Таким образом, в этом случае диаметр нашей системы четырех точек не меньше чем $\sqrt{2} = 1,41 \ldots$

Если четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 расположены так, как изображено на рис. 143, *б*, то хотя бы один из углов $A_1A_4A_2$, $A_2A_4A_3$, $A_3A_4A_1$, не меньше 120°. Отсюда в точности, как выше, заключаем, что в этом случае диаметр системы точек не меньше $\sqrt{3} = 1,73 \ldots$ ($\sqrt{3}$ есть основание равнобедренного треугольника с боковыми сторонами 1 и углом при вершине в 120°).

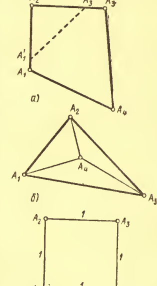


Рис. 143.

Итак, во всех случаях диаметр системы точек не меньше $\sqrt{2} = 1,41 \ldots$; диаметр в точности равен $\sqrt{2}$ в том (и только в том) случае, когда точки расположены в вершинах *квадрата* (рис. 143, *в*).

в) $n = 5$. Пять точек на плоскости являются вершинами выпуклого пятиугольника (рис. 144, *а*), или четыре из них образуют выпуклый четырехугольник, внутри которого расположена пятая точка (рис. 144, *б*), или три точки образуют треугольник, внутри которого заключены остальные две точки (рис. 144, *в*). Рассмотрим последовательно все эти случаи.

Если пять точек образуют выпуклый пятиугольник, то хотя бы один из углов пятиугольника не меньше $108° \left(= \frac{(5-2)\cdot 180°}{5}\right)$. Если, например, $\angle A_1A_2A_3 \geqslant 108°$, то, повторяя почти дословно рассуждения решения задачи б), мы докажем, что $A_1A_3 \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61 \ldots \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2 \sin 54°\right.$ есть основание равнобедренного треугольника с боковыми сторонами 1 и углом при вершине в 108°). Таким образом, в этом случае диаметр системы точек не меньше $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61 \ldots$

Если пять точек расположены так, как это изображено на рис. 144, *б*, то диаметр системы точек тоже не может быть меньше $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Действительно, из четырех углов $A_1A_5A_3$, $A_2A_5A_4$, $A_3A_5A_1$ и $A_4A_5A_2$ [1]) по крайней мере два не превосходят 180°; пусть это будут, например, углы $A_1A_5A_3$ и $A_2A_5A_4$. В таком случае сумма трех

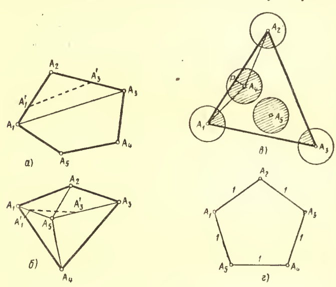


Рис. 144.

углов $A_1A_5A_3$, $A_2A_5A_4$ и $A_4A_5A_1$ будет больше 360° (она будет превосходить 360° на величину угла $A_2A_5A_3$). Следовательно, хотя бы один из этих углов больше 120°; пусть это будет, например, угол $A_1A_5A_3$. В этом случае $A_1A_3 \geqslant \sqrt{3} = 1{,}73\ldots > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ср. с решением задачи б)).

Если, наконец, пять точек расположены так, как это изображено на рис. 144, *в*, то опишем вокруг всех пяти точек круги радиуса 1/2; очевидно, никакие два из них не пересекутся. Далее, если, например, круг с центром в точке A_4 пересекает сторону A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$, то длины отрезков A_1P и A_2P, где P есть

---

[1]) Здесь, например, $\angle A_1A_5A_3$ есть угол, на который надо повернуть A_5A_1 вокруг A_5 в направлении по часовой стрелке, чтобы совместить его со стороной A_5A_3 угла; таким образом, углы $A_1A_5A_3$ и $A_3A_5A_1$, вообще говоря, не равны:

$$\angle A_1A_5A_3 + \angle A_3A_5A_1 = 360°.$$

проекция A_4 на A_1A_2, не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$; действительно, $A_1P = \sqrt{A_1A_4^2 - A_4P^2} > \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{ибо } A_1A_4 \geqslant 1,\ A_4P < \frac{1}{2}\right)$.

Таким образом, в этом случае $A_1A_2 > \sqrt{3} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Если же ни один из кругов с центрами во внутренних точках A_4 и A_5 не пересекает сторон треугольника $A_1A_2A_3$, то площадь $A_1A_2A_3$ больше $2\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5\pi}{8}$ (внутри треугольника помещаются два круга радиуса 1/2 и три сектора, сумма центральных углов которых равна 180°). С другой стороны, хотя бы один из трех углов треугольника $A_1A_2A_3$ не превосходит 60°; пусть, например, $\angle A_1A_2A_3 \leqslant 60°$ и, скажем, $A_1A_2 \leqslant A_2A_3$. В таком случае

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot A_2A_3 \sin \angle A_1A_2A_3 \leqslant \frac{1}{2} A_2A_3^2 \sin 60° \leqslant \frac{A_2A_3^2\sqrt{3}}{4},$$

и значит,

$$\frac{A_2A_3^2\sqrt{3}}{4} > \frac{5\pi}{8},$$

откуда вытекает, что

$$A_2A_3 > \sqrt{\frac{5\pi}{2\sqrt{3}}} > \sqrt{\frac{14}{3{,}5}} = \sqrt{4} = 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Итак, во всех случаях *диаметр системы не меньше* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61\ldots$; диаметр в точности равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в том (и только в том) случае, когда точки расположены в вершинах *правильного пятиугольника* (рис. 144, *г*).

[Во всех случаях $n = 2, 3, 4, 5$ наиболее выгодным в смысле настоящей задачи расположением n точек оказывается то, при котором точки расположены в вершинах *правильного* n-*угольника* («правильный 2-угольник» — это отрезок); однако при $n > 5$ дело будет обстоять уже не так (см., в частности, рис. 34, *а, б* на стр. 71).]

83. а) Опишем вокруг каждой из наших n точек круг радиуса $\frac{\mu}{2}$; так как $\min A_iA_j = \mu$ (где $i, j = 1, 2, \ldots, n$), то эти круги *не пересекаются.* Опишем далее круг с центром в одной из наших точек (какой угодно) радиусом $1 + \frac{\mu}{2}$; так как концентрический с ним круг радиуса 1 содержит все наши точки (ибо $\max A_iA_j = 1$), то наш больший круг наверняка содержит все построенные ранее круги радиуса $\frac{\mu}{2}$. Таким образом, мы видим, что n попарно не пересекающихся кругов радиуса $\frac{\mu}{2}$ целиком содержатся в круге

радиуса $1+\frac{\mu}{2}$. Сравнивая теперь площадь большого круга с общей площадью содержащихся внутри малых кругов, получаем

$$\pi\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2 > n\pi\left(\frac{\mu}{2}\right)^2,$$

откуда

$$1+\frac{\mu}{2} > \sqrt{n}\,\frac{\mu}{2}, \quad \text{и значит,} \quad \mu < \frac{2}{\sqrt{n}-1} \quad \left(=\frac{2(\sqrt{n}+1)}{n-1}\right). \quad (1)$$

б) Использовав те же самые рассуждения, что и выше, но заменив содержащий все наши точки круг радиуса 1 на (также содержащий все точки!) круг радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (см. задачу 93 б) ниже), получим

$$\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\mu}{2}\right)^2 > n\pi\left(\frac{\mu}{2}\right)^2,$$

откуда

$$\mu < \frac{2\sqrt{3}}{3(\sqrt{n}-1)} \qquad \left(=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{n}+1)}{3(n-1)}\right). \qquad (2)$$

Примечание. Оценки (1) и (2) не являются точными и дают лишь весьма грубое представление об истинных значениях интересующих нас величин. Использованные в решении задачи соображения позволят получить и несколько лучшие оценки. Так, например, заменяя фигурирующий в решении задачи 88 «круг Юнга» K радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$ «шестиугольником Пала» со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (площадь этого шестиугольника $Ш$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а периметр равен $2\sqrt{3}$; по поводу круга K и шестиугольника $Ш$ см. задачу 93 и относящийся к ней текст) и учитывая, что площадь «внешней параллельной оболочки ширины h» фигуры F площади S и периметра P равна $S+Ph+\pi h^2$ (ср. с решением задачи 77 б)), мы вместо использованных выше соотношений получим следующее:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\,\mu+\pi\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 > n\pi\left(\frac{\mu}{2}\right)^2,$$

откуда

$$\pi(n-1)\mu^2-4\sqrt{3}\,\mu-2\sqrt{3}<0,$$

т. е.

$$\mu < \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{12+2\sqrt{3}\,\pi(n-1)}}{\pi(n-1)}. \qquad (3)$$

Наконец, если учесть еще и то, что *расположенные внутри выпуклой фигуры F равные непересекающиеся круги покрывают заведомо меньше чем долю $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ от полной ее площади F* (по поводу этого

важного результата см., например, § 4 гл. III книги Л. Фейеш Тот [24]), то последний результат можно усилить так:

$$n\pi\left(\frac{\mu}{2}\right)^2<\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\,\mu+\pi\left(\frac{\mu}{2}\right)^2\right],$$

откуда

$$(6n-\pi\sqrt{3})\,\mu^2-12\mu-6<0,$$

т. е.

$$\mu<\frac{6+\sqrt{36+6\,(6n-\pi\sqrt{3})}}{6n-\pi\sqrt{3}}. \qquad (4)$$

Заметим еще, что все формулы (1) — (4) показывают, что с ростом n величина $\mu(n)$ убывает примерно как $\frac{1}{\sqrt{n}}$: из (1) вытекает следующая «асимптотическая» (т. е. справедливая при больших n) формула:

$$\mu(n)<\frac{2}{\sqrt{n}} \qquad (1')$$

(ее «асимптотический» характер определяется тем, что при n большом $f_1(n)=\frac{2(\sqrt{n}+1)}{n-1}\sim\frac{2}{\sqrt{n}}$ в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(n)}{2/\sqrt{n}}=1$). Аналогично этому, формулы (2) — (4) приводят к следующим «асимптотическим» формулам:

$$\mu(n)<\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \left(\approx 1{,}155\sqrt{n}\right); \qquad (2')$$

$$\mu(n)<\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\pi}}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \left(\approx 1{,}05\sqrt{n}\right); \qquad (3')$$

$$\mu(n)<\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (4')$$

84. а) Ясно, что диаметр рассматриваемой ломаной не может быть меньше 1. Нетрудно видеть, что при $n=3$ и $n=5$ он может *равняться* 1 — примерами могут служить *правильный треугольник* со стороной 1 (рис. 145, *а*) и *правильная пятиугольная звезда* («правильный звездчатый пятиугольник» — рис. 145, *в*; заметьте, что при $n=3$ диаметр ломаной обязательно равняется 1).

Рассмотрим теперь 4-звенную ломаную $ABCD$. Так как $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ равнобедренные и имеют общее основание AC и одинаковые боковые стороны (они $=1$), то (поскольку по условию задачи точка B *не совпадает* с D) эти два треугольника расположены по разные стороны от их общего основания AC, т. е. четырехугольник $ABCD$ — *ромб*.

Диаметр ромба $R=A_1A_2A_3A_4$ со стороной 1 равен длине наибольшей диагонали; эта диагональ будет короче всего, если наибольший угол ромба имеет наименьшую возможную величину 90°

(если реализуется $\min\limits_{R} \max\limits_{i} A_i$), т. е. если ромб обращается в *квадрат* (рис. 145, *б*); в этом случае диаметр ромба равен $\sqrt{2}$.

При $n = 6$ рассмотрим «двузубец» $ABCDE$, где $AB = BC = CD = DE = 1$; на «основании» AE «двузубой пилы» по ту же сторону от AE, что и сама «пила», построим равнобедренный

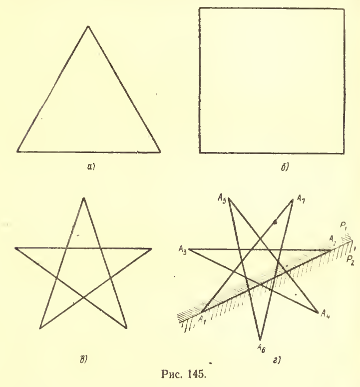


Рис. 145.

$\triangle AFE$, где $AF = FE = 1$ (рис. 146, *а*). Ясно, что если AE очень мало, то диаметр построенный ломаной $ABCDEF$ будет очень близок к 1 — его можно сделать с к о л ь у г о д н о близким к 1, если выбрать $AE = \delta$ достаточно малым. А так как 1 диаметр 6-звенной ломаной равняться не может (см. ниже решение задачи б)), то наименьшего значения диаметра 6-звенной ломаной вообще н е с у щ е с т в у е т (хотя диаметр и м о ж е т б ы т ь *с к о л ь у г о д н о б л и з о к* к 1).

б) Ясно, что при любом н е ч е т н о м n диаметр n-звенной ломаной может *равняться* 1; соответствующие примеры доставляют правильный треугольник при $n = 3$ и правильный звездчатый n-угольник при $n > 3$ (см. рис. 145, *г*, на котором $n = 7$). Докажем теперь, что *если диаметр $l(n)$ n-звенной ломаной, все звенья которой равны* 1, *тоже равен* 1, *то n обязательно н е ч е т н о.*

Пусть AB и CD — два несоседних звена ломаной, удовлетворяющей условиям задачи (где $n > 3$); мы утверждаем, что *CD пересекает AB.*

Действительно, если $l(n) = 1$, то обе точки C и D лежат внутри двух кругов радиуса 1 с центрами A и B, т. е. принадлежат «линзе», образованной в пересечении этих кругов. Отсюда сразу следует, что C и D лежат по разные стороны от AB, ибо если C лежит по какую-то определенную сторону от AB, то все остальные точки рассматриваемой «линзы», расположенные по ту же сторону от AB, что и C, удалены от C меньше чем на 1 (сделайте чертеж!). А так как AB есть «поперечник» линзы, разбивающий ее на две части, то CD пересекает AB.

Рассмотрим теперь две полуплоскости P_1 и P_2, на которые разбивает плоскость прямая какого-либо звена A_1A_2 нашей ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 145, г). Пусть точка A_3 лежит в полуплоскости P_1. Тогда A_4 лежит в полуплоскости P_2 (ибо A_3A_4 пересекает A_1A_2); точка A_5 лежит в полуплоскости P_1 (ибо A_4A_5 пересекает A_1A_2); точка A_6 лежит в полуплоскости P_2 (ибо A_5A_6 пересекает A_1A_2), и т. д., т. е. все вершины ломаной с нечетными номерами (кроме A_1) лежат в полуплоскости P_1, а все вершины с четными номерами (кроме A_2) — в полуплоскости P_2. Но звенья A_2A_3 и A_1A_n ломаной пересекаются; отсюда следует, что точки A_3 и A_n лежат в одной и той же полуплоскости. Следовательно, *n нечетно*, что нам и требовалось доказать.

Рис. 146.

Нетрудно видеть далее, что при любом четном $n = 2m \geqslant 6$ диаметр $l(n)$ ломаной может быть *сколь угодно близок* к 1: для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть «$(m-1)$-зубую пилу» $A_1A_2 \ldots A_{2m-1}$, подобную изображенной на рис. 146, б и «замыкающую» ее двухзвенную ломаную $A_{2m-1}A_{2m}A_1$, где $A_{2m-1}A_{2m} = A_{2m}A_1 = 1$; ясно, что при достаточно малом A_1A_{2m-1} диаметр построенной таким путем ломаной $A_1A_2 \ldots A_{2m-1}A_{2m}$ будет сколь угодно близок к 1.

Таким образом, если $l(n)$ есть диаметр n-звенной ломаной, удовлетворяющей условию задачи, то

$\min l(n) = 1$ при всех нечетных $n \geqslant 3$;

$\inf l(n) = 1$ (но $\min l(n)$ не существует[1]) при всех четных $n > 4$, но неожиданным образом

$$\min l(4) = \sqrt{2}.$$

85. а) Очевидно (ибо условию задачи удовлетворяет лишь *правильный* $\triangle A_1A_2A_3$).

б) Ясно, что каждые две точки разбивают периметр рассматриваемого четырехугольника на две части, длина хоть одной из

[1] Ср. выше, стр. 16—17.

которых $\leqslant 2$; отсюда вытекает, что диаметр четырехугольника $d(4) < 2$ ($d(4)) = 2$ для «вырожденного» четырехугольника, все стороны которого принадлежат одной прямой). С другой стороны, в силу решения задачи 84 а), $d(4) \geqslant \sqrt{2}$ ($d(4) = \sqrt{2}$ только в том случае, если рассматриваемый четырехугольник — *квадрат*).

в) В силу результата задачи 82 в) диаметр $d(5)$ выпуклого пятиугольника не может быть меньше диаметра $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\approx 1{,}61$) правильного пятиугольника $\left(\text{и } d(5) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right.$ только для *правильного пятиугольника*). С другой стороны, так как все диагонали рассматриваемого пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ меньше 2 (например, $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3 = 2$), то $d(5) < 2$ (ср. с задачей 78; $d(5) = 2$ для вырожденного «пятиугольника», три соседние вершины которого принадлежат одной прямой).

г) Так как каждая диагональ шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ всегда $\leqslant 3$ (например, $A_1A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 = 3$), то его диаметр $d(6)$ всегда $\leqslant 3$ ($d(6) = 3$ для вырожденного «шестиугольника», все вершины которого принадлежат одной прямой). Сложнее найти н а и м е н ь ш е е возможное значение $d(6)$ диаметра *выпуклого* равностороннего шестиугольника со сторонами длины 1.

Рассмотрим равносторонний треугольник $A_1A_3A_5$ со стороной d. Проведем из каждой его вершины как из центра дугу, соединяющую две другие вершины (рис. 147, *а*). Середины дуг A_1A_3, A_3A_5 и

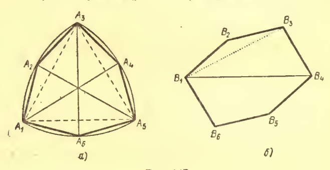


Рис. 147.

A_5A_1 обозначим соответственно через A_2, A_4 и A_6; в таком случае $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ есть выпуклый шестиугольник, все стороны которого равны между собой. Так как дуга A_1A_3 равна 60°, то $\angle A_3A_1A_2 = \frac{30°}{2} = 15°$; отсюда легко выводится, что $\angle A_6A_1A_2 = 60° + 2\cdot 15° = 90°$ и $\angle A_1A_2A_3 = 180° - 2\cdot 15° = 150°$. Таким образом, *у шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чередуются углы* 90° *и* 150°. Из того, что $\angle A_6A_1A_2 = 90°$, $\angle A_1A_2A_3 = 150°$, заключаем: $A_6A_2 < A_1A_3 = d$; отсюда следует, что диаметр шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равен d (d равны диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_1A_3, A_3A_5 и A_5A_1 этого шестиугольника). Предположим теперь, что стороны шестиугольника равны 1; в таком случае *диаметр d равен* $2\sin 75° = 1{,}93...$ По-

кажем теперь, что *никакой шестиугольник со сторонами длины* 1 *не может иметь меньший диаметр.*

Пусть $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ есть какой-то выпуклый шестиугольник, все стороны которого равны 1 (рис. 147, *б*). Так как сумма всех углов шестиугольника равна $180°(6-2)=720°$, найдутся два соседних угла шестиугольника, сумма которых не меньше чем $\frac{2\cdot 720°}{6}=240°$; пусть, например, B_2 и B_3 — такие углы. Если при этом хотя бы один из углов B_2, B_3 больше 150°, то диагональ, соединяющая вторые концы сторон, сходящихся в этом углу, будет больше чем $2\cdot\sin 75°$. Докажем, теперь, что если $\angle B_2 \leqslant 150°$ и $\angle B_3 \leqslant 150°$, то $B_1B_4 \geqslant 2\sin 75°$.

Из треугольника $B_1B_2B_3$ находим $B_1B_3 = 2\sin\frac{\angle B_2}{2}$, $\angle B_2B_3B_1 = 90° - \frac{\angle B_2}{2}$ и, следовательно,

$$\angle B_1B_3B_4 = \left(\angle B_3 + \frac{\angle B_2}{2}\right) - 90°.$$

Теперь по теореме косинусов из треугольника $B_1B_3B_4$ имеем

$$B_1B_4^2 = B_3B_4^2 + B_1B_3^2 - 2B_3B_4\cdot B_1B_3\cos\angle B_1B_3B_4 =$$
$$= 1 + 4\sin^2\frac{B_2}{2} - 4\sin\frac{B_2}{2}\cos\left[\left(B_3+\frac{B_2}{2}\right)-90°\right] =$$
$$= 1 - 4\sin\frac{B_2}{2}\left[\sin\left(B_3+\frac{B_2}{2}\right)-\sin\frac{B_2}{2}\right] =$$
$$= 1 - 8\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\cos\frac{B_2+B_3}{2} =$$
$$= 1 + 8\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\sin\left(\frac{B_2+B_3}{2}-90°\right).$$

Таким образом, расстояние B_1B_4 будет наименьшим, когда выражение $\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\left(\sin\frac{B_2+B_3}{2}-90°\right)$ будет наименьшим.

Воспользуемся тем, что

$$\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{B_2-B_3}{2}-\cos\frac{B_2+B_3}{2}\right).$$

Следовательно, при заданной сумме $\angle B_2 + \angle B_3 = \sigma$ (по условию $\sigma \geqslant 240°$) выражение $\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}$ будет тем меньше, чем больше будет по абсолютной величине разность $\angle B_2 - \angle B_3$. Но по условию ни один из углов B_2, B_3 не превосходит 150°; поэтому при заданной сумме σ выражение $\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}$ (следовательно, и $\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\sin\left(\frac{B_2+B_3}{2}-90°\right)$, — а значит, и длина B_1B_4) будет наименьшим, если $\angle B_2 = 150°$ или $\angle B_3 = 150°$.

Предположим теперь, что $\angle B_2 = 150°$, $\angle B_3 = \sigma - 150°$. В таком случае имеем

$$B_1B_4^2 = 1 + 8\sin 75° \sin\left(\frac{\sigma}{2} - 75°\right)\sin\left(\frac{\sigma}{2} - 90°\right).$$

Но заметим теперь, что в шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис. 147, *а*) $\angle A_2 = 150°$ и $\angle A_2 + \angle A_3 = 240°$; поэтому

$$A_1A_4^2 = 1 + 8\sin 75° \sin(120° - 75°)\sin(120° - 90°).$$

Из сравнения выражений для $B_1B_4^2$ и $A_1A_4^2$ непосредственно следует, что $B_1B_4 \geqslant A_1A_4 = 2\sin 75°$ (ибо $\sigma \geqslant 240°$; следовательно, $\sin\left(\frac{\sigma}{2} - 75°\right) \geqslant \sin(120° - 75°)$, $\sin\left(\frac{\sigma}{2} - 90°\right) \geqslant \sin(120° - 90°)\right)$; при этом $B_1B_4 = A_1A_4$ только в том случае, если $\angle B_2 = \angle A_2$, $\angle B_3 = \angle A_3$.

Таким образом, мы заключаем, что *ни один выпуклый шестиугольник со сторонами длины* 1 *не имеет диаметра, меньшего* $2\sin 75° = 1{,}93...$; *диаметр шестиугольника равен* $2\sin 75°$ *в том (и только в том) случае, когда шестиугольник имеет вид, изображенный на рис.* 147, *а*.

В заключение заметим еще, что, очевидно,

$$2\sin 75° = 2\cos 15° = 2\cos\frac{30°}{2} = \\ = 2\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = 2\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

86. а) Ясно, что для площади S и периметра P треугольника ABC диаметра 1 (треугольника, наибольшая сторона которого равна 1; ср. задачу 78 а)) справедливы неравенства

$$0 < S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\approx 0{,}433) \qquad \text{и} \qquad 2 < P \leqslant 3$$

($P = 2$ в «вырожденном» случае, когда вершины треугольника принадлежат одной прямой, и $P = 3$, если все стороны треугольника равны 1, т. е. если треугольник *равносторонний*; $S = 0$ в «вырожденном» случае, когда все вершины треугольника принадлежат одной прямой, и $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$, когда треугольник ABC *равносторонний* — ср. с задачей 74 а)).

б) Площадь S и периметр P четырехугольника $ABCD$ диаметра 1, т. е. четырехугольника, наибольшая сторона или наибольшая диагональ которого равна 1 (см. задачу 78 а)), удовлетворяют неравенствам

$$0 < S \leqslant \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \text{и} \qquad 2 < P < 4.$$

В самом деле, ясно, что $S > 0$, причем S может быть сколь угодно близко к нулю (равенство $S = 0$ достигается для «вырожденного»

четырехугольника, все вершины которого принадлежат одной прямой). С другой стороны, учитывая, что в нашем случае $AC \leqslant 1$ и $BD \leqslant 1$, из формулы

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\alpha$$

(где α — угол между диагоналями четырехугольника; ср. с решением задачи 45а)) — рассмотрите отдельной случай выпуклого и случай невыпуклого четырехугольника $ABCD$), получаем

$$S \leqslant \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

где равенство достигается лишь в том случае, когда $AC = BD = 1$ и $\alpha = 90°$.

Далее ясно, что если диаметр четырехугольника $ABCD$ равен 1, то ни одна его сторона не может превосходить 1; поэтому

$$P < 4,$$

причем P может быть сколь угодно близко к 4: достаточно лишь предположить, что треугольник ABC равносторонний со стороной 1, а вершина D (невыпуклого) четырехугольника $ABCD$ достаточно близка к вершине B.

С другой стороны, если расстояние между двумя точками M и N четырехугольника равно 1, то длина каждой из двух ломаных, на которые делится контур многоугольника точками M и N, не меньше 1, и значит,

$$P > 2;$$

при этом периметр $ABCD$ может быть сколь угодно близок к 2, если только все вершины четырехугольника достаточно близки к прямой MN[1]).

в) Неравенства

$$0 < S \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad P > 2$$

сохраняют силу и для выпуклого четырехугольника $ABCD$; однако задача определения *наибольшего возможного значения периметра выпуклого четырехугольника ABCD диаметра* 1 (т. е. задача об отыскании *выпуклого четырехугольника ABCD диаметра* 1 и *наибольшего возможного периметра*) является довольно сложной. Решение этой задачи мы расчленим на ряд шагов.

1°. Диаметр MN выпуклого четырехугольника $ABCD$ всегда совпадает с наибольшей диагональю или с наибольшей стороной четырехугольника, т. е. равен наибольшему из шести отрезков AB, BC, CD, DA, AC и BD (см. задачу 78 а)). Докажем теперь, что *для*

[1]) Аналогично можно показать, что, скажем, периметр P *пятиугольника ABCDE* диаметра 1 удовлетворяет неравенствам

$$2 < P < 5,$$

причем P может быть сколь угодно близко и к 2 и к 5.

любого выпуклого четырехугольника диаметра 1 *и периметра* P *найдется либо треугольник того же диаметра* 1 *и периметра* $\geqslant P$, *либо выпуклый четырехугольник диаметра* 1 *и периметра* $\geqslant P$, *у которого обе диагонали и по крайней мере одна сторона равны* 1.

Рассмотрим случай I: отрезок длины $d = 1$ есть сторона AB четырехугольника $ABCD$ (рис. 148). Если $AC < d$, то будем

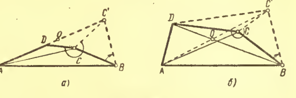


Рис. 148.

поворачивать сторону BC вокруг точки B так, чтобы угол ABC увеличивался до тех пор, пока либо четырехугольник $ABC'D$ (прежде чем станет невыпуклым) выродится в треугольник (рис. 148, *а*), либо выполнится равенство $AC' = 1$ (рис. 148, *б*). Как мы покажем дальше, в обоих случаях

$$1 \geqslant DC' \geqslant DC, \qquad (*)$$

откуда будет следовать, что диаметр (быть может, «вырожденного») четырехугольника $ABC'D$ по-прежнему равен 1; нетрудно видеть, что периметр его $\geqslant P$.

Если $ABC'D$ — четырехугольник с диагональю $AC' = d$ (рис. 148, *б*), то, поворачивая сторону AD аналогично тому, как мы это делали ранее со стороной BC, можно будет, не уменьшая периметра P, прийти либо к четырехугольнику $ABC'D'$, выродившемуся в треугольник, либо к четырехугольнику $ABC'D'$, у которого $BD' = d$. Таким образом, для того чтобы доказать для случая 1 сформулированное выше утверждение, достаточно убедиться в справедливости неравенства (*).

2°. Докажем сначала, что

$$DC' \geqslant DC.$$

Для этого достаточно показать, что $\angle DCC' = \angle DCB + \angle BCC'$ заключен в пределах от 90° до 270°. Так как четырехугольник $ABCD$ выпуклый, а треугольник BCC' равнобедренный, то

$$\angle DCB < 180°, \qquad \angle BCC' < 90°,$$

откуда $\angle DCC' < 270°$. Далее, в $\triangle ACB$ сторона $AB = 1$ является наибольшей, и поэтому $\angle ACB \geqslant 60°$, а значит, и подавно $\angle DCB > 60°$. Но в $\triangle AC'B$ (рис. 148, *б*; рассмотрите сами более простой случай рис. 148, *а*) также $AC' = AB$, и поэтому $\angle ABC' < 90°$, а значит, и подавно $\angle CBC' < 90°$, откуда $\angle BCC' > 45°$.

Итак,

$$\angle DCC' = \angle DCB + \angle BCC' > 60° + 45° = 105° > 90°.$$

Докажем теперь, что $DC' \leqslant 1$. Пусть O — точка пересечения AC' и BD; тогда

$$DC' + 1 = DC' + AB < (DO + OC') + (AO + OB) = AC' + BD \leqslant 2,$$

что завершает доказательство неравенства (*).

3°. Перейдем теперь к случаю II: отрезок длины $d = 1$ есть диагональ AC четырехугольника $ABCD$ (рис. 149). Пусть AB —

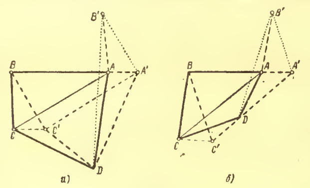


Рис. 149.

такая сторона четырехугольника, что сумма углов четырехугольника $ABCD$, прилежащих к AB, не превосходит 180°:

$$\angle BAD + \angle ABC \leqslant 180°.$$

На продолжении отрезка AB за точку A возьмем некоторую близкую к A точку A' и построим $CC' \# AA'$; при этом $A'C' = AC$. Будем увеличивать отрезок AA' до тех пор, пока либо одна из сторон четырехугольника $A'BC'D$ не станет равной 1 (рис. 149, *а*), либо четырехугольник $A'BC'D$ (прежде чем стать невыпуклым) превратится в треугольник (рис. 149, *б*). Диаметр построенного четырехугольника по-прежнему, очевидно, равен 1; покажем, что его периметр $\geqslant P$. Отложим $AB' \# CB$; тогда

$$\angle B'AB + \angle BAD = \angle ABC + \angle BAD \leqslant 180°,$$

откуда следует, что ломаная $B'A'D$ объемлет ломаную $B'AD$. Поэтому

$$BC + AD = B'A + AD \leqslant B'A' + A'D = BC' + A'D;$$

кроме того,

$$CD \leqslant CC' + C'D = AA' + C'D.$$

Из этих двух неравенств получаем

$$AB + BC + CD + DA \leqslant AB + AA' + C'D + BC' + A'D = \\ = BA' + BC' + C'D + A'D,$$

что нам и требовалось доказать.

Итак, мы убедились, что периметр P' четырехугольника $A'BC'D$ не меньше периметра P четырехугольника $ABCD$ с тем же диаметром. При этом либо четырехугольник $A'BC'D$ вырождается в треугольник, либо у выпуклого четырехугольника $A'BC'D$ одна из сторон равна его диаметру. Тем самым мы снова приходим к случаю I, который был разобран выше. Таким образом, вместо всевозможных четырехугольников диаметра 1 мы можем теперь ограничиться лишь вырожденными «четырехугольниками» (*треугольниками*), *у которых* $P \leqslant 3$ (см. задачу а)), и такими *четырехугольниками* $ABCD$, *у которых*

$$AB = AC = BD = 1.$$

4°. Пусть для определенности $BC \geqslant DA$ (рис. 150). На стороне AB как на основании построим по ту же сторону от AB, что и

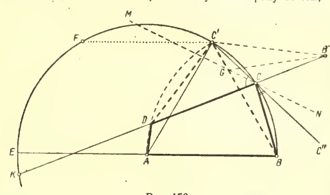


Рис. 150.

четырехугольник $ABCD$, равносторонний треугольник ABC' (со стороной 1). Покажем, что

$$DC' + C'B \geqslant DC + CB, \qquad (**)$$

т. е. что *четырехугольник* $ABC'D$ *при том же диаметре имеет не меньший периметр, чем четырехугольник* $ABCD$.

Покажем сначала, что $\angle C'CD > \angle C''CB$, где точка C'' лежит на продолжении $C'C$ за точку C. Построим окружность BCC' с центром A и радиусом 1; пусть прямая CD второй раз пересекает эту окружность в точке K. Так как $1 = BC' \geqslant BC \geqslant DA$ (и точки B, C, C', соответственно A, D, C', принадлежит двум равным дугам окружностей радиуса 1 с центрами A, соответственно B), то точка D лежит не дальше от прямой AB, чем точка C, а C — не дальше, чем C'; поэтому $\smile KC' \geqslant \smile FC' = 60° = \smile C'B$, где $FC' \parallel AB$; отсюда и следует, что

$$\angle C'CD = \frac{1}{2} \smile KC' \geqslant \frac{1}{2} \smile C'B = \angle C''CB.$$

Из этого неравенства вытекает, что биссектриса MCN угла $B'CB$ (точка B' лежит на продолжении DC за точку C) лежит внут-

ри угла $C'CD$, и следовательно, пересекает отрезок $C'B$ в некоторой точке G. Если $CB' = CB$, то также $GB' = GB$, и значит,

$$DC' + C'B = DC' + C'G + GB = DC' + C'G + GB' \geqslant DB' = \\ = DC + CB' = DC + CB,$$

что и доказывает неравенство (**).

Таким образом, далее мы можем ограничиться такими *четырехугольниками* $ABCD$, *у которых*

$$AB = BC = AC = BD = 1.$$

5°. В случае, когда выполнены последние условия п. 4°, вершины A, B и C четырехугольника $ABCD$ образуют равносторонний треугольник со стороной 1, а вершина D принадлежит дуге AC

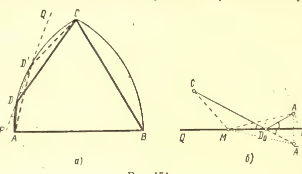


Рис. 151.

окружности радиуса 1 с центром B (рис. 151, a). Пусть D' — с е р е д и н а дуги AC, т. е. $\smile AD' = \smile D'C$. Покажем, что

$$AD' + CD' \geqslant AD + CD, \qquad (***)$$

т. е. что *четырехугольник* $ABCD'$ *при том же диаметре* 1, *что и* $ABCD$, *имеет не меньший чем* $ABCD$, *периметр*.

В самом деле, если P лежит на продолжении $D'D$ за точку D, то

$$\angle PDA = 180° - \angle ADD' = \frac{1}{2} \smile ADD' = \frac{1}{2} \smile D'C = \angle D'DC.$$

Но, как хорошо известно, если D_0 *есть та точка прямой* PQ, *которая имеет* *н а и м е н ь ш у ю сумму расстояний до заданных точек* A *и* C, расположенных по одну сторону от PQ, то $\angle AD_0P = \angle CD_0Q$. (Это следует из того, что если точка $\bar{A}$ симметрична A относительно прямой PQ, то для всех точек M прямой PQ имеем $AM + CM = \bar{A}M + CM$, а наименьшую сумму расстояний до точек $\bar{A}$ и C имеет точка D_0 пересечения PQ с отрезком $\bar{A}C$, для которой как раз $\angle AD_0P = \angle CD_0Q$; см. рис. 151, б.) Поэтому точка D_0 совпадает с D, — откуда и следует неравенство (***).

Окончательно получаем

$$BA + AD + DC + CB \leqslant BA + AD' + D'C + CB.$$

Подведем итоги. Мы видим, что *четырехугольник ABCD, для которого отношение периметра P к диаметру d = 1 максимально, характеризуется условиями*

$$AB = BC = AC = BD = d\ (= 1); \qquad AD = DC.$$

Периметр P такого четырехугольника $ABCD'$ (см. рис. 151, *a*), очевидно, равен

$$AB + BC + CD' + D'A = 2AB + 2AD' = 2 + 4\sin 15° = \\ = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2} > 3;$$

неравенство $P > 3$ доказывает, что встречавшимися нам в процессе деформации исходного четырехугольника случаями, когда он «вырождался», обращаясь в треугольник, можно пренебречь: ведь для треугольника диаметра 1 всегда $P \leqslant 3$. Таким образом окончательно мы получаем следующую (точную!) оценку для периметра P выпуклого четырехугольника $ABCD$ диаметра 1:

$$2 < P \leqslant 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2} \quad (\approx 3{,}03).$$

Периметр $P = 2$, когда «четырехугольник» вырождается в отрезок; периметр $P = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$ имеет только построенный в процессе решения задачи *ромбоид* (четырехугольник с двумя парами равных соседних сторон) $ABCD'$, две равные стороны которого и большая из диагоналей (она является осью симметрии ромбоида) равны 1.

87. а) Доказательство мы проведем методом математической индукции. Ясно, что число наибольших из отрезков, попарно соединяющих три точки, не может быть больше *трех* (ведь здесь общее число отрезков равно трем!). Предположим теперь уже доказанным, что *наибольшую длину из числа отрезков, попарно соединяющих заданные $n-1$ точек плоскости, могут иметь не более чем $n-1$ отрезков*; докажем, что в таком случае *наибольшую длину из числа $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ отрезков, попарно соединяющих заданные n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ плоскости могут иметь не более чем n отрезков.*

Проведем все диаметры нашей системы из n точек плоскости. Если из каждой из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ исходят не более двух диаметров, то, считая эти диаметры «по концам», мы получим число $\leqslant 2n$; но при этом каждый диаметр засчитывается дважды (ибо он соединяет две точки!); поэтому общее число диаметров не превосходит $\frac{1}{2} \cdot 2n = n$. Таким образом, нам остается рассмотреть лишь тот случай, когда, скажем, *из вершины A_1 исходят* три *диаметра A_1A_i, A_1A_j и A_1A_k* (и, может быть, какие-то еще диаметры нашей системы точек) [1].

Так как $A_1A_i = A_1A_j = A_1A_k = 1$, а $A_iA_j, A_iA_k, A_jA_k \leqslant 1$, то ни один из углов $A_iA_1A_j$, $A_iA_1A_k$, $A_jA_1A_k$ не превосходит 60°; пусть $A_iA_1A_j$ — наибольший из этих трех углов, т. е. пусть отрезок

[1] Заметим, что только при разборе этого более сложного случая мы воспользуемся сделанным ранее «индуктивным предположением», касающимся числа диаметров совокупности из $n-1$ точки.

A_1A_k проходит внутри (острого) угла $A_iA_1A_j$ (рис. 152). Так как диаметр нашей системы точек равен 1, то все точки принадлежат заштрихованному на рис. 152 криволинейному треугольнику T, образованному пересечением трех кругов Kp_1, Kp_i и Kp_j радиуса 1 с центрами A_1, A_i и A_j. Но A_1 есть единственная точка пересечения треугольника T с окружностью Okp_k с центром A_k и радиусом 1, т. е. A_1 есть единственная точка треугольника T, удаленная от A_k на расстояние 1 (почему?). Поэтому из вершины A_k нашей системы точек может исходить лишь единственный диаметр, а именно A_kA_1. Удалим теперь A_k из числа рассматриваемых точек; у нас останутся $n-1$ точек, согласно предположению индукции служащих концами не более чем $n-1$ отрезков длины 1. Присоединив к этим $n-1$ точкам также и точку A_k, мы придем к исходной системе n точек, имеющей не более

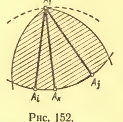


Рис. 152.

$$(n-1)+1=n$$

диаметров: $n-1$ диаметров, соединяющих попарно $n-1$ точек, получаемых исключением точки A_k, и 1 диаметр A_1A_k.

Нетрудно видеть, что число диаметров n-угольника при любом n может равняться n, — см. рис. 153, *а*, на котором изображен

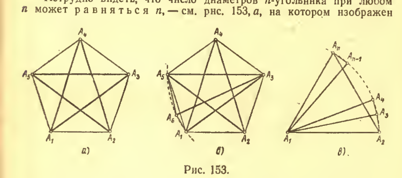


Рис. 153.

правильный n-угольник с нечетным числом n вершин (здесь $n=5$), или рис. 153, *б*, на котором изображен правильный многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ с нечетным числом $n-1=2m-1$ вершин (здесь $n-1=5$), а последняя вершина A_n n-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, где $n=2m$ четно, принадлежит дуге $A_{n-1}A_1$ окружности радиуса 1 с центром A_m.

[Вот еще одна конструкция, приложимая одновременно и к случаю четного и к случаю нечетного n: пусть вершины A_1, A_2 и A_n (выпуклого) n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ образуют правильный треугольник со стороной 1, а вершины A_3, A_4, ..., A_{n-1} принадлежат дуге A_2A_n окружности радиуса 1 с центром A_1 (рис. 153, *в*).]

б) Воспользуемся опять методом математической индукции. Ясно, что число диаметров системы из четырех точек пространства (системы вершин треугольной пирамиды, или тетраэдра)

не может превосходить $2 \cdot 4 - 2 = 6$, — ведь в этом случае число отрезков, попарно соединяющих наши точки (число ребер тетраэдра), равно 6. Предположим теперь уже доказанным, что *наибольшую длину из числа отрезков, попарно соединяющих данные $n-1$ точек пространства, могут иметь не более чем $2 \cdot (n-1) - 2 = 2n-4$ отрезков*; докажем, что тогда *наибольшую длину из числа отрезков, попарно соединяющих какие-либо n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пространства могут иметь не более чем $2n-2$ отрезка.*

Проведем все отрезки, соединяющие попарно наши n точек. Число диаметров нашей системы точек, исходящих из определенной точки A_i (где i может равняться 1, 2, 3, ... или n), обозначим через δ_i; в таком случае общее число диаметров системы будет равно

$$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)$$

— ведь в сумме $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ каждый диаметр учитывается дважды. Далее рассмотрим отдельно два случая.

1°. *Существует такая точка A_j, что $\delta_j \leqslant 2$.* Отбросим эту точку; мы придем к системе $n-1$ точек, имеющей, по сделанному предположению, не более чем $2n-4$ диаметра[1]). Присоединив теперь к полученной таким образом системе из $n-1$ точек также и точку A_j, мы вернемся к исходной системе точек, имеющей не более чем

$$(2n-4)+2=2n-2$$

диаметров.

2°. *Каждое из чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j$ не меньше* 3. Для того чтобы оценить количество диаметров в этом (наиболее сложном!) случае, рассмотрим пересечение (общую часть) Π шаров $Ш_1, Ш_2, \ldots, Ш_n$ радиуса 1 с центрами в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Так как каждый из рассматриваемых шаров содержит внутри все наши точки, то и Π содержит внутри все наши точки (или натянутый на них «выпуклый n-вершинник»[2]) М). Ясно, что Π — выпуклое[3]) тело, ограниченное n «кусками» $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ сфер $Сф_1, Сф_2, \ldots, Сф_n$, являющихся поверхностями шаров $Ш_1, Ш_2, \ldots, Ш_n$ (на рис. 154 это тело Π изображено для того простейшего случая, когда многогранник М есть тетраэдр). Каждая из «криволинейных граней» $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ тела Π представляет собой часть одной из сфер $Сф_1, Сф_2, \ldots, Сф_n$, высекаемую из этой сферы $n-1$ шарами, ограниченными остальными $n-1$ сферами; так, например, «грань»

---

[1]) Заметим, что лишь при разборе этого более простого случая нам придется воспользоваться «индуктивным предположением», касающимся систем из $n-1$ точек пространства!

[2]) Можно считать, что выпуклая оболочка М наших точек (см. начало решения задачи 31 б)) представляет собой выпуклый многогранник с n вершинами («выпуклый n-вершинник»), ибо если бы какая-либо из наших точек попала внутрь М, то из нее не мог бы выходить ни один диаметр системы (ср. с задачей 78 б)), — и эту точку можно было бы вовсе исключить из рассмотрения.

[3]) Из приведенного на стр. 56 второго определения выпуклых тел сразу следует, что *пересечение* любого числа выпуклых тел (в частности, *любого числа шаров*) снова *представляет собой выпуклое тело.*

σ_1 — это часть сферы $C\phi_1$, высекаемая из нее шарами $Ш_2$, $Ш_3$, ..., $Ш_n$. Но каждый шар высекает из сферы $C\phi_1$ «шапочку» (или «сферический круг»); σ_1 — это пересечение ряда таких «шапочек»; таким образом, σ_j (где j равно 1, 2, 3, ... или n) — это своеобразный «круговой многоугольник», ограниченный (на поверхности сферы $C\phi_j$) некоторым числом дуг окружностей; этот многоугольник σ_j является «выпуклым» в том смысле, что «выпуклым» является бесконечный *конус* (разумеется, не круговой, а с неправильным «основанием»), образованный всеми лучами, соединяющими центр сферы $C\phi_j$ с точками многоугольника σ_j. [Этот конус представляет собой пересечение некоторого числа обыкновенных круговых конусов, отвечающих «шапочкам», пересечением которых является σ_j.] «Стороны» многоугольника σ_j — это части окружностей, по которым сферу $C\phi_j$ пересекают другие сферы $C\phi_1$, $C\phi_2$, ..., $C\phi_{j-1}$, $C\phi_{j+1}$, ..., $C\phi_n$, а его «вершины» — точки, в которых сферу $C\phi_j$ пересекают сразу д в е и л и б о л ь ш е из остальных $n-1$ сфер. Заметим теперь, что число b_j вершин «кругового многоугольника» σ_j не меньше δ_j, — ведь в число вершин σ_j наверное входят те δ_j вершин многогранника М, которые удалены от A_j на расстояние 1: если A_k — такая вершина М, что $A_jA_k = 1$, то A_k принадлежит $C\phi_j$ с центром A_j и радиусом 1; A_k является в е р ш и н о й многоугольника σ_j, поскольку в точке A_k пересекаются δ_k (т. е. $\geqslant 3$) сфер, центрами которых являются δ_k вершин многогранника М, удаленных от A_k на расстояние 1. Таким образом, мы имеем $b_j = \delta_j + \varepsilon_j$, где $\delta_j \geqslant 3$ и $\varepsilon_j \geqslant 0$ (здесь $j = 1, 2, \ldots, n$); другими словами, каждый из многоугольников σ_j имеет $b_j \geqslant 3$ вершин (а значит, и $b_j \geqslant 3$ сторон), т. е. σ_j не вырождается в точку или в дугу окружности и не может быть «двуугольником» (или «линзой»), т. е. не может быть ограниченным всего двумя дугами окружностей.

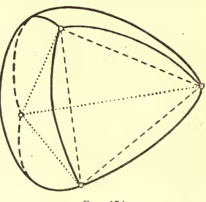


Рис. 154.

Теперь мы уже близко подошли к нашей цели. Применим к «искривленному выпуклому многограннику» $П$ теорему Эйлера [1]), в силу которой

$$B - P + Г = 2, \qquad (Э)$$

[1]) Эта теорема справедлива не только для обычных многогранников, но и для любых «искривленных многогранников», грубо говоря, устроенных так же, как обычные многогранники, т. е. полученных из них такой деформацией граней и ребер, при которой они не рвутся и не склеиваются, но грани перестают быть плоскими, а ребра — прямолинейными. По этому поводу см. литературу, указанную в сноске на стр. 151.

где B, P и Γ — число вершин, ребер и граней многогранника. Соотношение (Э) можно также переписать следующим образом:

$$P = B + \Gamma - 2. \qquad (Э')$$

Но в нашем случае

$$\Gamma = n$$

(«многогранник» Π имеет n граней $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$),

$$P = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$$

(ибо в сумму $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ числа сторон всех «граней» $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ каждое искривленное «ребро» «многогранника» Π входит дважды — в соответствии с теми двумя «гранями», которым оно принадлежит), наконец,

$$B \leqslant n + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$$

(ибо в сумме $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ всех «лишних», т. е. отличных от точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вершин «многогранника» Π каждая вершина засчитывается минимум трижды: ведь каждая из учитываемых в этой сумме вершин принадлежит минимум трем из «граней» $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ «многогранника»). Подставляя эти значения Γ, B и P в соотношение (Э′), получаем

$$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) \leqslant$$

$$\leqslant n + n + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) - 2,$$

или

$$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) \leqslant 2n - 2 - \frac{1}{6}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) \leqslant 2n - 2,$$

что и требовалось доказать: ведь $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)$ в точности равно сумме диаметров-отрезков многогранника М.

С другой стороны, легко построить пример выпуклого «n-вершинника» М, имеющего точно $2n - 2$ диаметров: для этого доста-

точно провести сферы $C\phi_1$ и $C\phi_2$ радиуса 1 с центрами в вершинах A_1 и A_2 правильного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ с ребром 1. Их пересечение содержит дугу A_3A_4; выберем на этой дуге точки A_5, A_6, ..., A_n. Тогда выпуклая оболочка n точек A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n представляет собой выпуклый многогранник с n вершинами, число диаметров которого равно

$$6 + 2(n-4) = 2n-2$$

(ср. с рис. 153, *в* на стр. 285; сделайте сами чертеж, отвечающий, скажем, значению $n = 6$).

88. Мы будем использовать указанные на стр. 78 обозначения, не забывая при этом, что речь здесь идет про точки одной прямой. Чтобы уловить общую закономерность начнем с небольших значений n.

1°. Ясно, что при $n = 2$ имеем: $N(a, 2) = 1$ при всех a.

2°. Конечно, $N(1, n) = 1$ при любом числе n точек; в частности $N(1, 3) = 1$. Если же $a < 1$, то сколь бы близко к 1 число a не было, можно расположить наши три точки так, что число отрезков A_iA_j длины $\geqslant a$ будет $\geqslant 2$ (рис. 155, *а*). Начиная со значения $a = \frac{1}{2}$, можно добиться, чтобы число не меньших a отрезков совпало с общим числом отрезков A_iA_j, т. е. равнялось 3 (рис. 155, *б*).

3°. $N(1, 4) = 1$ (см. п. 2°); при всех же $a < 1$ можно добиться того, чтобы число не меньших a отрезков A_iA_j (где $i, j = 1, 2, 3$ или 4) было $\geqslant 4$ (рис. 155, *в*). Начиная со значений $a < \frac{1}{2}$, число не меньших a отрезков A_iA_j можно сделать $\geqslant 5$ (рис. 155, *г*), а начиная со значения $a = \frac{1}{3}$, — равным 6 (рис. 155, *д*).

Рис. 155.

4°. $N(1, 5) = 1$; $N(a, 5) \geqslant 6$ при $a < 1$; $N(a, 5) \geqslant 8$ при $a < \frac{1}{2}$; $N(a, 5) \geqslant 9$ при $a < \frac{1}{3}$; наконец, $N(a, 5) = 10$ при $a \leqslant \frac{1}{4}$ (сделайте самостоятельно отвечающие этим случаям чертежи).

Приведенных примеров достаточно, чтобы уловить общую закономерность: переступив значение $a = \frac{1}{k}$, мы должны «перестроить» расположение точек на отрезке A_1A_n, наиболее рациональным образом группируя их в окрестностях $k + 1$ точек, делящих отрезок A_1A_n на k равных частей (концы отрезка учитываются).

Окончательно мы при этом получаем:

$$N(a,\ n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a = 1, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{n^2}{4}, \text{ если } n \text{ четно} \\ \dfrac{n^2-1}{4}, \text{ если } n \text{ нечетно} \end{array}\right\} & \text{при } 1 > a \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{n^2}{3}, \text{ если } n \text{ делится на } 3 \\ \dfrac{n^2-1}{3}, \text{ если } n \text{ не делится на } 3 \end{array}\right\} & \text{при } \dfrac{1}{2} > a \geqslant \dfrac{1}{3}; \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{3n^2}{8}, \text{ если } n \text{ делится на } 4, \\ \dfrac{3n^2-3}{8}, \text{ если } n \text{ нечетно}, \\ \dfrac{3n^2-4}{8}, \text{ если } n \text{ четно, но не делится на } 4 \end{array}\right\} & \text{при } \dfrac{1}{3} > a \geqslant \dfrac{1}{4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ C_n^2 - 2\left(= \dfrac{n^2-n-4}{2}\right) \text{ при } \dfrac{1}{n-3} > a \geqslant \dfrac{1}{n-2}, & \\ C_n^2 - 1\left(= \dfrac{n^2-n-2}{2}\right) \text{ при } \dfrac{1}{n-2} > a \geqslant \dfrac{1}{n-1}, & \\ C_n^2\left(= \dfrac{n^2-n}{2}\right) \quad \text{при} \quad a \leqslant \dfrac{1}{n-1} & \end{cases}$$

и вообще

$$N(a,\ k) = \frac{k-1}{2k}n^2 - \frac{r(k-r)}{2k} \qquad \text{при} \qquad \frac{1}{k-1} > a \geqslant \frac{1}{k},$$

если $n = lk + r$ (где k, l, r — целые числа и $0 \leqslant r < k$); здесь $k < n - 1$.

89. а) Согласно результату задачи 87 а) имеем: $N(1{,}4) = N(4) = 4$ (см., например, рис. 156, *а*); в силу результата задачи 82 б) имеем: $N(a,\ 4) = C_4^2 = 6$ при $a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ $\Bigl($и **лишь** при $a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; см. рис. 156, *б*$\Bigr)$. Если же $1 > a > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $N(a,\ 4) = 5$ (рис. 156, *в*).

б) Согласно результату задачи 87а) имеем: $N(1{,}5) = N(5) = 5$ (рис. 157, *а*); согласно результату задачи 82 в) имеем: $N(a,\ 5) = C_5^2 = 10$ при $a \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ $\Bigl($и **только** при $a \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} =$

$= \frac{2}{\sqrt{5}+1}$; см. рис. 157, *б*$\Big)$. Что же касается значений $1 > a > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то здесь можно использовать оптимальные расположения

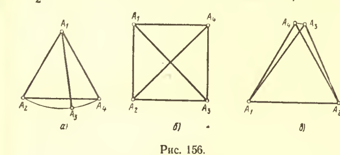
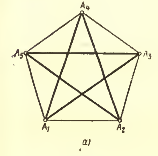
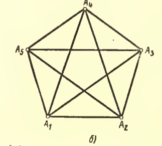
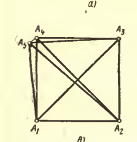


Рис. 156.







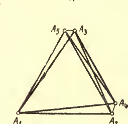
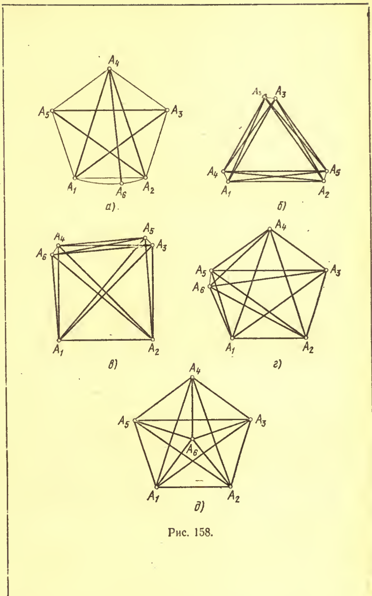


Рис. 157.

четырех и трех точек: при $\frac{\sqrt{2}}{2} > a > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ имеем $N(a, 5) = 9$ (рис. 157, *в*); при $1 > a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ получаем $N(a, 5) = 8$ (рис. 157, *г*).



A4
A5
A3
A1
A6
A2
а)
A5
A3
A4
A5
A1
A2
б)
A4
A5
A6
A3
A1
A2
в)
A4
A5
A3
A6
A1
A2
г)
A4
A5
A3
A6
A1
A2
д)

Рис. 158.

в) Задача решается аналогично задачам а) и б) с использованием результата задачи 87 а) и аналога задачи 82, относящегося к случаю $n = 6$. Ответ:

$$N(a, 6) = \begin{cases} 6 \text{ при } & a = 1, \\ 12 \text{ при } & 1 > a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\approx 0{,}707), \\ 13 \text{ при } & \frac{\sqrt{2}}{2} > a \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\approx 0{,}618), \\ 14 \text{ при } & \frac{\sqrt{5}-1}{2} > a > \frac{1}{2\sin 72^\circ} \quad (\approx 0{,}526), \\ 15 \text{ при } & \frac{1}{2\sin 72^\circ} \geqslant a \end{cases}$$

(рис. 158, a — ∂).

90. Число $\nu_2(4) < 6$, ибо иначе и число диаметров системы четырех точек плоскости могло бы равняться «полному» числу шести соединяющих наши точки отрезков, а в силу результата задачи 87 а) это не так. Однако число равных 1 отрезков, соединяющих точки нашей системы из четырех точек плоскости, может равняться 5:

$$\nu_2(4) = 5$$

(рис. 159).

Примечание. Очевидно также, что $\nu_2(3) = 3$ и вообще

$$\nu_k(n) = C_n^2 \left(= \frac{n(n-1)}{2}\right) \quad \text{при} \quad n \leqslant k + 1.$$

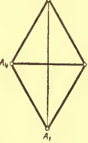


Рис. 159.

91. Пусть A_j — какая-либо из наших точек. Проведем окружность S с центром A_j и радиусом 1; тогда на этой окружности могут лежать не более шести точек нашей системы (ибо расстояние между каждыми двумя из этих точек $\geqslant 1$; если число расположенных на S точек равно 6, то они являются вершинами *правильного* шестиугольника со стороной 1). Таким образом, число равных 1 отрезков с концом A_j обязательно $\leqslant 6$; суммируя все такие отрезки «по их концам», мы придем к числу $6n$, которое еще надо разделить пополам, поскольку каждый отрезок имеет два конца. Отсюда и следует, что общее число соединяющих наши точки отрезков длины 1 обязательно $\leqslant 3n$.

92. Мы начнем с разбора задачи а) — более частной, но зато и несколько более простой, чем задача б).

а) Пусть $AB = z(F) = z$ — диаметр фигуры $Ц(F)$; $A_1A_2 = 1$ и $B_1B_2 = 1$ — диаметры исходной фигуры F, серединами которых являются точки A и B (рис. 160). Так как отрезок AB является медианой $\triangle AB_1B_2$, то по известной формуле для длины медианы

треугольника имеем

$$z^2 = AB^2 = \frac{1}{4}\left(2AB_1^2 + 2AB_2^2 - B_1B_2^2\right)$$

$$\left(= \frac{1}{4}\left(2AB_1^2 + 2AB_2^2 - 1\right), \text{ ибо } B_1B_2 = 1\right).$$

Применим теперь ту же формулу для длины медианы треугольника к $\triangle B_1A_1A_2$ и к $\triangle B_2A_1A_2$ с медианами B_1A и B_2A:

$$B_1A^2 = \frac{1}{4}\left(2B_1A_1^2 + 2B_1A_2^2 - A_1A_2^2\right), \qquad \text{или} \qquad B_1A^2 \leqslant \frac{3}{4},$$

поскольку $A_1A_2 = 1$, а B_1A_1, $B_1A_2 \leqslant 1$;

$$B_2A^2 = \frac{1}{4}\left(2B_2A_1^2 + 2B_2A_2^2 - A_1A_2^2\right), \qquad \text{или} \qquad B_2A^2 \leqslant \frac{3}{4},$$

поскольку $A_1A_2 = 1$, а B_2A_1, $B_2A_2 \leqslant 1$.

Таким образом, имеем

$$2\left(B_1A^2 + B_2A^2\right) \leqslant 2\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = 3,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство

$$z^2 = \frac{1}{4}\left[2\left(B_1A^2 + B_2A^2\right) - 1\right] \leqslant \frac{1}{4}(3 - 1) = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$z \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, мы уже доказали требуемое неравенство для *стереометрического* варианта задачи; нам осталось только убедиться,

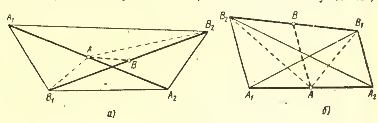


Рис. 160.

что в этом случае его улучшить н е л ь з я, и отдельно рассмотреть *планиметрический* вариант задачи, где оценку м о ж н о улучшить. Начнем мы с существенно более простого случая п р о с т р а н с т в е н н ы х фигур.

1°. Если фигура F *пространственная*, то в с е отрезки B_1A_1, B_1A_2, B_2A_1 и B_2A_2 могут равняться 1 (для этого необходимо — и достаточно, — чтобы рассматриваемая фигура F содержала пра-

вильиый тетраэдр $A_1A_2B_1B_2$ с ребром 1; см. рис. 161, на котором изображен правильный тетраэдр T с ребром 1 и центральиая фигура $Ц(T)$ этого тетраэдра, представляющая собой шесть точек, являющихся вершииами правильного октаэдра *ок* диаметра $\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$. Поэтому здесь

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

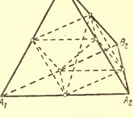
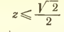


Рис. 161.

2°. Нам осталось рассмотреть более сложиый случай *плоской* фигуры F. Выведеииое выше иеравеиство



$$z \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

сохраняет силу и в этом случае; одиако если точки A_1, A_2, B_1 и B_2 рис. 160 принадлежат одиой плоскости, то равенства $A_1B_1 = A_1B_2 = A_2B_1 = A_2B_2 = 1$ не могут все иметь места; поэтому иевозможно и равеиство $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Мы покажем, что *если фигура F плоская*, то $z \leqslant \frac{1}{2}$, *причем отрезок $AB = z$ принимает наибольшее возможное значение $z = \frac{1}{2}$ в том случае, когда две из точек A_1, A_2, B_1, B_2 сливаются между собой и четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ обращается в* (равиостороиний) *треугольник $A_1A_2B_1$* с основаиием $A_1B_1 = 1$ и средией лииией $AB = z = \frac{1}{2}$ (рис. 162, *а*).

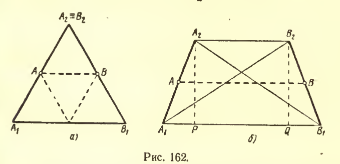


Рис. 162.

Для доказательства заметим прежде всего, что отрезки A_1A_2 и B_1B_2 на рис. 160 можио считать не принадлежащими прямой AB, ибо если, скажем, отрезок B_1B_2 прииадлежит прямой AB и точка B_2 расположена *вне* отрезка AB, то, поскольку $AB_2 \leqslant 1$ (ибо A и B_2 — точки выпуклой фигуры F диаметра 1) и $BB_2 = \frac{1}{2}$, мы получаем $AB \leqslant \frac{1}{2}$, и значит, рассматриваемая

конфигурация точек A_1, A_2 и B_1, B_2 заведомо не более выгодна, чем изображенная на рис. 162, *а*.

Предположим теперь, что *точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону от прямой AB* и что $A_1B_1 \geqslant A_2B_2$ (рис. 163). Заметим, прежде всего, что отрезки A_1A_2 и B_1B_2 можно считать непересекающимися. В самом деле, если бы они пересекались в точке O

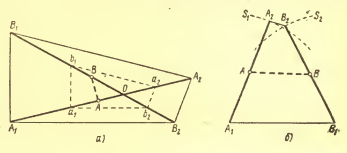


Рис. 163.

(рис. 163, *а*), то отрезок AB, очевидно, целиком принадлежал бы выпуклому четырехугольнику $a_1b_1a_2b_2$, где a_1, b_1, a_2 и b_2 — соответственно середины отрезков OA_1, OB_1, OA_2 и OB_2 (почему?). А так как в силу результата задачи 78 а) диаметр четырехугольника $a_1b_1a_2b_2$ равен $a_1a_2 = b_1b_2 = \frac{1}{2}$ $\left(\text{ведь } A_1B_1,\ B_1A_2,\ A_2B_2,\ B_2A_1 \leqslant 1, \text{ и значит, } a_1b_1,\ b_1a_2,\ a_2b_2,\ b_2a_1 \leqslant \frac{1}{2}\right)$, то $AB \leqslant \frac{1}{2}$, и значит, конфигурация, изображенная на рис. 163, *а*, также никак не может быть более выгодной чем та, которая изображена на рис. 162, *а*. Но и случай, когда отрезки A_1A_2 и B_1B_2 не пересекаются (рис. 163, *б*) также невозможен, ибо в этом случае точка A_2 лежит на окружности S_1 с центром A_1 и радиусом 1 и внутри окружности S_2 с центром B_1 и радиусом 1 или на ней (ведь $B_1A_2 \leqslant 1$!), а точка B_2 лежит на S_2 и внутри S_1 (или на S_1), — но тогда A_1A_2 и B_1B_2 могут не пересечься, лишь если точки A_2 и B_2 обе совпадают с точкой пересечения S_1 и S_2, и мы снова приходим к конфигурации рис. 162, *а*.

Окончательно мы получаем требуемый результат: *наибольшее значение z отрезка AB достигается в том случае, когда $A_2 \equiv B_2$ и* $A_1B_1 = 1$ (рис. 162, *а*); при этом

$$z = \frac{1}{2}.$$

б) Общая задача б) близка к ее частному случаю а); поэтому ее решение мы изложим более кратко. Считая, что на рис. 160 теперь про отрезки A_1A_2 и B_1B_2 лишь известно, что оба они по длине не превосходят некоторой фиксированной величины a, где $0 < a < 1$, мы получим из тех же треугольников AB_1B_2, $B_1A_1A_2$

и $B_2A_1A_2$, что и раньше:

$$z^2 = AB^2 = \frac{1}{4}\left(2AB_1^2 + 2AB_2^2 - B_1B_2^2\right)$$

и

$$AB_1^2 = \frac{1}{4}\left(2B_1A_1^2 + 2B_1A_2^2 - A_1A_2^2\right),$$

$$AB_2^2 = \frac{1}{4}\left(2B_2A_1^2 + 2B_2A_2^2 - A_1A_2^2\right).$$

Отсюда следует

$$z^2 = AB^2 = \frac{1}{4}\left[\left(B_1A_1^2 + B_1A_2^2 + B_2A_1^2 + B_2A_2^2 - A_1\,A_2^2\right) - B_1B_2^2\right].$$

Но так как $B_1A_1,\ B_1A_2,\ B_2A_1,\ B_2A_2 \leqslant 1$ и $A_1A_2,\ B_1B_2 \geqslant a$, то

$$z^2 \leqslant \frac{1}{4}(4 - 2a^2), \qquad \text{т. е.} \qquad z \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}.$$

Далее мы опять будем рассматривать пространственный и плоский случаи раздельно.

1°. Если наши точки расположены как угодно *в пространстве*, то равенство $z = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}$ может иметь место: для этого необходимо (и достаточно), чтобы фигура F содержала треугольную пирамиду (тетраэдр) $A_1A_2B_1B_2$, где $A_1B_1 = A_1B_2 = A_2B_1 = A_2B_2 = 1$ (и $A_1A_2 = B_1B_2 = a$; ср. рис. 161). Таким образом, в случае *стереометрической* задачи

$$z(a) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}.$$

2°. Если фигура F *плоская*, то равенство $z = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}$ не может выполняться, ибо невозможно, чтобы в изображенном на рис. 160 (плоском) четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ имели место равенства $A_1B_1 = A_1B_2 = A_2B_1 = A_2B_2 = 1$ и $A_1A_2 = B_1B_2 = a$. Этот случай заметно отличается от плоского; наиболее выгодна здесь изображенная на рис. 162, *б* трапеция $A_1A_2B_2B_1$, у которой $A_1B_1 = A_1B_2 = A_2B_1 = 1$ и $A_1A_2 = B_1B_2 = a$; для этой трапеции, как мы покажем немного ниже,

$$z = AB = 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Как и выше, заключаем, что *отрезки A_1A_2 и B_1B_2 не могут принадлежать прямой AB*; в самом деле, если бы, скажем, отрезок B_1B_2 принадлежал прямой AB и точка B_2 лежала вне отрезка AB, то, поскольку $AB_2 \leqslant 1$ (ибо A и B_2 — точки выпуклой фигуры F диаметра 1) и $BB_2 \geqslant \frac{a}{2}$, мы имели бы

$$AB = AB_2 - BB_2 \leqslant 1 - \frac{a}{2} \leqslant 1 - \frac{a^2}{2}$$

(где равенство $1-\frac{a}{2}=1-\frac{a^2}{2}$ имеет место лишь при $a=0$ и при $a=1$); поэтому этот случай менее выгоден, чем изображенная на рис. 162, *б* трапеция. Следовательно, мы по-прежнему можем считать, что точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону от прямой AB, а точки A_2 и B_2 — по другую.

Заметим теперь, что в самом выгодном случае отрезки A_1A_2 и B_1B_2 будут обязательно равны a (а не больше a). Действительно, если бы на рис. 160 мы имели бы $A_1A_2 > a$, $B_1B_2 > a$ (или если бы имело место хоть одно из этих двух неравенств), то мы могли бы «уменьшить» четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$, равномерно «стянув» отрезки A_1A_2 и B_1B_2 к их серединам A, соответственно B, т. е. заменив их равными a отрезками $A_1'A_2'$ и $B_1'B_2'$. При этом диаметр четырехугольника $A_1'A_2'B_2'B_1'$, заключенного внутри $A_1A_2B_2B_1$, был бы меньше диаметра четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$, и мы могли бы сдвинуть один из двух отрезков $A_1'A_2'$ и $B_1'B_2'$ — скажем отрезок $A_1'A_2'$ — вдоль прямой AB в такое положение $A_1''A_2''$, чтобы диаметр четырехугольника $A_1''A_2''B_2'B_1'$ все еще был $\leqslant 1$ (сделайте самостоятельно соответствующие чертежи, отвечающие случаям рис. 160, *а* и *б*). А так как для нового четырехугольника $A_1''A_2''B_2'B_1'$

$$z' = A'B > AB = z$$

(где A' — середина $A_1''B_1''$), то четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ заведомо не является самым выгодным.

Считая, что $A_1B_1 \geqslant A_2B_2$ и что отрезки A_1A_2 и B_1B_2 *не пересекаются* (ср. рис. 163, *б*; рассмотрите сами более простой случай, когда A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются), мы прежде всего заметим, что равенство $A_1B_1 = A_2B_2$ невозможно. Действительно, в этом случае четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ обратился бы в *параллелограмм*; но квадрат хоть одной из диагоналей параллелограмма не меньше суммы квадратов неравных его сторон (ибо хоть один угол параллелограмма $\geqslant 90°$) — и если, скажем, $A_1B_2^2 \geqslant A_1A_2^2 + A_2B_2^2$, то, поскольку $A_1B_2 \leqslant 1$ и $A_1A_2 = a$, мы имели бы

$$z^2 = AB^2 = A_2B_2^2 \leqslant 1 - a^2 \leqslant \left(1-\frac{a^2}{2}\right)^2$$

(где последнее равенство имеет место лишь при $a=0$); поэтому параллелограмм $A_1A_2B_2B_1$ заведомо не выгоднее изображенной на рис. 162, *б* трапеции.

Далее несложно показать, что если четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ «самый выгодный»[1]), то $A_1B_2 = B_1A_2 = 1$: в самом деле, если, скажем, $A_1B_2 < 1$, то нам достаточно повернуть слегка B_1B_2 вокруг B_1 во «внешнюю» по отношению к $A_1A_2B_2B_1$ сторону — и мы тем самым увеличим AB, т. е. «улучшим» конфигурацию точек. Из равенств же $A_1B_2 = B_1A_2 = 1$ и из равенств $A_1A_2 = B_1B_2 = a$ сле-

[1]) Относительно существования такого «самого лучшего» четырехугольника см., например, книгу [30] или статьи [1] и [28], или Дополнение I к книге [29].

дует, что $\triangle A_1A_2B_1 = \triangle A_1B_2B_1$ — и значит, $A_1A_2B_2B_1$ есть действительно изображенная на рис. 162, *б равнобедренная трапеция.*

Обозначим теперь большее основание A_1B_1 этой трапеции через e, где должно быть $e \leqslant 1$ и опустим из вершин A_2 и B_2 перпендикуляры A_2P и B_2Q на основание A_1B_1. В таком случае, очевидно,

$$B_1A_2^2 - B_1P^2 = A_1A_2^2 - A_1P^2 \qquad \left(= A_2P^2\right),$$

т. е.

$$B_1P^2 - A_1P^2 = B_1A_2^2 - A_1A_2^2 = 1 - a^2.$$

А так как, с другой стороны,

$$B_1P^2 - A_1P^2 = (B_1P + PA_1)(B_1P - PA_1)$$

и

$$B_1P + PA_1 = A_1B_1 = e, \quad \text{а} \quad B_1P - PA_1 = B_1P - B_1Q = PQ = A_2B_2,$$

то мы имеем

$$A_2B_2 = \frac{B_1A_2^2 - A_1A_2^2}{A_1B_1} = \frac{1-a^2}{e}.$$

Следовательно,

$$z = AB = \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_2B_2) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1-a^2}{e}\right),$$

где $e \geqslant \frac{1-a^2}{e}$ (ибо A_1B_1 — большее основание трапеции), но $e \leqslant 1$.

Заметим теперь, что произведение

$$e \cdot \frac{1-a^2}{e} = 1 - a^2$$

не зависит от величины e; таким образом, площадь прямоугольника $KLMN$ с основанием $KL = e$ и (меньшей основания) высотой $KN = \frac{1-a^2}{e}$ имеет известное (т. е. зависящее лишь от заданной величины a) значение $s = 1 - a^2$. Но если сравнить два прямоугольника одной и той же площади s — прямоугольник $KLMN$ со сторонами $KL = e$ и $KN = \frac{1-a^2}{e}$ и прямоугольник $KL'M'N'$ со сторонами $KL' = e' > e$ и $KN' = \frac{1-a^2}{e'}$, то, поскольку заштрихованные на рис. 164 прямоугольники $LL'M'R$ и $NN'RM$ равновелики, т. е.

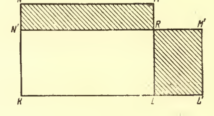


Рис. 164.

$$NN' \cdot N'R = LL' \cdot LR$$

и

$$N'R = KL > KN = LM > LR,$$

получаем

$$NN' < LL'.$$

Следовательно,

$$KN' + KL' = (KN - NN') + (KL + LL') = $$
$$= (KN + KL) + (LL' - NN') > KN + KL,$$

и значит, *значение суммы* $e + \frac{1-a^2}{e}$ отрезков $KL (= e)$ и $KN \left(= \frac{1-a^2}{e}\right)$ *будет тем больше, чем больше величина* e. Поэтому в условиях нашей задачи *величина*

$$z = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1-a^2}{e}\right)$$

принимает наибольшее значение, когда величина $A_1B_1 = e$ *принимает наибольшее возможное значение* $e = 1$. Но в этом последнем случае, очевидно,

$$z = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-a^2}{1}\right) = 1 - \frac{a^2}{2},$$

откуда и следует требуемый результат:

$$z(a) = 1 - \frac{a^2}{2}.$$

93. а) Каждый квадрат, заключающий внутри себя нашу фигуру F, всегда можно уменьшить с тем, чтобы хотя бы одна пара противоположных сторон квадрата «упиралась» в фигуру (рис. 165). Но если A и B — точки фигуры F диаметра 1, лежащие на противоположных сторонах квадрата, содержащего F внутри себя, то расстояние между этими сторонами квадрата (или, что то же самое, сторона квадрата) не превосходит AB, а $AB \leqslant 1$. С другой стороны, ясно, что *круг* диаметра 1 нельзя заключить ни в какой квадрат, сторона которого меньше 1.

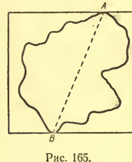


Рис. 165.

Таким образом, наименьший квадрат, в который можно заключить л ю б у ю фигуру диаметра 1, имеет сторону, равную 1.

б) П е р в о е   р е ш е н и е. Покажем, что *наименьшая* из содержащих фигуру F окружностей[1]) обязательно *содержит либо две точки F, являющиеся диаметрально противоположными точками этой окружности, либо три точки F, являющиеся вершинами остроугольного треугольника.* В самом деле, если окруж-

[1]) По поводу существования такой «наилучшей» из содержащих F окружностей (т. е. содержащей F окружности н а и м е н ь ш е г о радиуса) см. литературу, указанную в сноске на стр. 298.

ность S, содержащая F внутри себя, вообще не содержит точек F, то ее можно сжать, не меняя ее центра, с тем, чтобы новая окружность уже содержала точку A фигуры F (рис. 166, *а*). Если S содержит е д и н с т в е н н у ю точку A фигуры F, то ее также можно уменьшить с тем, чтобы она продолжала содержать F внутри себя: для этого достаточно сдвинуть слегка S в направлении OA (где O — центр S) с тем, чтобы она все еще содержала F внутри, но уже не проходила ни через одну точку F, и после этого уменьшить сдвинутую окружность описанным выше способом (рис. 166, *б*). Наконец,

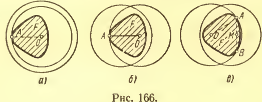


Рис. 166.

если S содержит две или более точек F, но все принадлежащие F точки S расположены на одной дуге AB, которая меньше полуокружности, то мы также можем заменить S меньшей окружностью, все еще содержащей F внутри себя: для этого достаточно слегка сдвинуть S в направлении OM, где M — середина хорды AB, с тем, чтобы сдвинутая окружность по-прежнему содержала F внутри, но уже не проходила ни через одну точку F, и после этого старым способом уменьшить эту сдвинутую окружность (рис. 166, *в*).

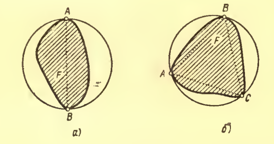


Рис. 167.

Отсюда вытекает, что если содержащая F внутри себя окружность S уже не может быть заменена меньшей, то она либо содержит две точки A и B, являющиеся диаметрально противоположными точками S (рис. 167, *а*), либо содержит три точки A, B и C, являющиеся вершинами остроугольного $\triangle ABC$ (рис. 167, *б*). В первом случае

$$2R = AB \leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad R \leqslant \frac{1}{2} \quad \left(< \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

где R — радиус окружности S; во втором случае хоть один из углов $\triangle ABC$ будет $\geqslant 60°$ (ибо сумма трех углов $= 180° = 3 \cdot 60°$), и если $90° \geqslant A \geqslant 60°$, то

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle A} \leqslant \frac{1}{2 \sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

С другой стороны, так как радиус описанной окружности *правильного* $\triangle ABC$ диаметра 1 (т. е. $\triangle ABC$, где $AB = BC = CA = 1$), равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, то оценку

$$R \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$$

улучшить нельзя.

Второе решение. Задача в) утверждает, что каждую фигуру F диаметра 1 можно заключить внутрь правильного шестиугольника $Ш$ со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Но отсюда следует, что F можно заключить и внутрь круга радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$, — а именно внутрь круга K, описанного вокруг шестиугольника $Ш$.

в) Рассмотрим содержащий F (сколь угодно большой!) шестиугольник с углами 120°, образованный в пересечении трех содержащих F (ограниченных параллельными прямыми) «полос», образующих между собой углы 120° (рис. 168). Сблизим затем между

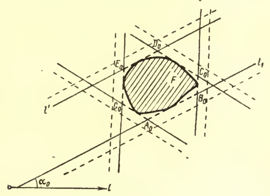


Рис. 168.

собой параллельные стороны шестиугольника до тех пор, пока они не «упрутся» в F. Так мы построим «описанный вокруг F» (т. е. такой, что все его стороны соприкасаются с F) *равноугольный* шестиугольник $ш \equiv ABCDEG$, все углы которого равны 120°.

Заметим теперь, что если мы зафиксируем направление стороны $\overline{AB}$ шестиугольника (рассматриваемой как вектор или как луч, направленный от A к B!) задав его, скажем, углом α, образованным

$\overline{AB}$ с каким-то произвольно фиксированным на плоскости лучом l, задающим «начало отсчета углов», то мы построим указанным образом единственный шестиугольник $ш = ш(\alpha)$, отвечающий выбранному направлению AB. Обозначим разность $AB - DE$ сторон $ш$ через ρ. Эта разность полностью определяется шестиугольником $ш$, который в свою очередь однозначно определяется по углу α между $\overline{AB}$ и l; таким образом, ρ является функцией α — и мы можем писать: $\rho = f(\alpha)$.

Пусть, скажем, для исходного шестиугольника, $A_0B_0C_0D_0E_0G_0$ имеем $A_0B_0 > D_0E_0$, так что (отвечающий этому шестиугольнику угол α мы обозначим через α_0)

$$f(\alpha_0) = A_0B_0 - D_0E_0 > 0.$$

Будем теперь «поворачивать» шестиугольник $ш$, непрерывно меняя угол α (скажем, увеличивая его) и каждый раз рассматривая описанный вокруг F равноугольный шестиугольник $ш = ш(\alpha) \equiv ABCDEG$ такой, что $\angle(\overline{AB}, l) = \alpha$. При изменении $ш$ будут меняться длины его сторон, а следовательно, и разность

$$\rho = f(\alpha) = AB - CD.$$

Но когда угол α_0 заменится на $\alpha_0 + 180°$, мы придем к тому же самому шестиугольнику $ш(\alpha_0 + 180°) = ш(\alpha_0) \equiv A_0B_0C_0D_0E_0G_0$, что и раньше; только теперь роль «первой» стороны A_0B_0 шестиугольника будет играть сторона D_0E_0, а роль противоположной ей стороны D_0E_0 — сторона A_0B_0; поэтому

$$\rho(\alpha_0 + 180°) = D_0E_0 - A_0B_0 = -(A_0B_0 - D_0E_0) < 0.$$

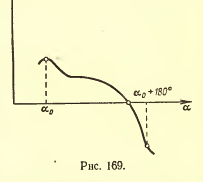


Рис. 169.

Таким образом, при увеличении угла α на $180°$ величина $\rho = f(\alpha)$ *меняет знак*: если она раньше была положительной, то теперь станет отрицательной, и наоборот[1]). А так как при малых изменениях α шестиугольник $ш(\alpha)$ остается близким к своему прежнему положению, то также и разность $\rho(\alpha) = AB - DE$ при этом меняется мало; иными словами, $f(\alpha)$ есть непрерывная функция от α[2]). А отсюда, в свою очередь, следует, что, переходя от положительных значений к отрицательным, функция $f(\alpha)$ должна где-то между значениями α_0 и $\alpha_0 + 180°$ аргумента принять значение 0 (см. рис. 169, изображающий вымышленный график функции $\rho = f(\alpha)$ — важно

[1]) Если $\rho(\alpha_0) = 0$, т. е. с самого начала $A_0B_0 = D_0E_0$, то весь этот этап решения задачи в) является лишним.

[2]) См., например, Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика. М., «Просвещение», 1967, §§ 5 и 6 гл. VI; ср. также § 2 книги [29].

здесь только то, что этот график представляет собой непрерывную кривую!). Таким образом, вокруг F можно описать такой равноугольный шестиугольник $Ш = ABCDEG$, противоположные стороны AB и DE которого *равны* между собой.

Заметим теперь, что расстояние между любыми двумя противоположными сторонами шестиугольника *Ш не превосходит* 1 — это устанавливается в точности так же, как в решении задачи а) доказывалось, что расстояние между сторонами квадрата, содержащими точки A и B фигуры F, будет $\leqslant 1$. Сдвинем теперь каждую из сторон шестиугольника $Ш$ параллельно во вне (по отношению к фигуре F) так, чтобы расстояния между каждыми параллельными сторонами $Ш$ стало в точности равно 1; при этом условимся сдвигать каждые две противоположные стороны $Ш$ на одно и то же расстояние. Мы утверждаем, что в получившемся шестиугольнике $Ш \equiv abcdeg$ противоположные стороны тоже равны: $ab = de$. В самом деле, поскольку мы сдвинули стороны AG и DC на одно и то же расстояние до положения A_1G_1, соответственно D_1C_1, то

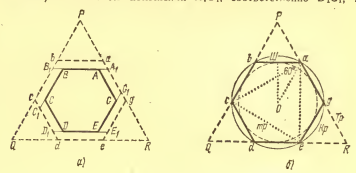


Рис. 170.

$BA_1 = ED_1$ (ибо $AA_1 = DD_1$; рис. 170, а); далее, поскольку BC и EG мы сдвинули до положения B_1c, соответственно E_1g на одно и то же расстояние, то $A_1B_1 = E_1D_1$; наконец, поскольку A_1B_1 и D_1E_1 мы сдвинули до положения ab, соответственно de на одно и то же расстояние, то $ab = de$.

Докажем, наконец, что полученный шестиугольник *Ш правильный*. В самом деле, образованный при продолжении сторон bc, de и ga шестиугольника $Ш$ треугольник $T \equiv PQR$ является правильным, поскольку все углы его равны 60°. Поэтому все высоты треугольника T имеют одну и ту же длину h. А так как расстояния между любыми двумя противоположными сторонами шестиугольника $Ш$ имеют одно и то же значение 1, то треугольники Pab, Qcd и Reg — это равносторонние треугольники с одной и той же высотой $h - 1$; поэтому они равны между собой, и значит, $ab = cd = eg$. Точно так же доказывается и что $bc = de = ga$. А так как $ab = de$, то шестиугольник $Ш$ является не только равноугольным, но и *равносторонним*, т. е. он — правильный.

Таким образом, мы убедились, что *каждую фигуру диаметра* 1 *можно заключить в правильный шестиугольник*, расстояние между противоположными сторонами которого равно 1, т. е. в правильный

шестиугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (и значит, с радиусом вписанного круга $r = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{2}$; ср. рис. 170, б). А так как круг диаметра 1 нельзя, очевидно, заключить в меньший правильный шестиугольник, то полученную нами оценку $ab \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ для стороны заключающего F правильного шестиугольника улучшить нельзя.

г) Первое решение. Из того, что сторона правильного треугольника, описанного вокруг круга диаметра 1, равна $\sqrt{3}$, вытекает, что в правильный треугольник, сторона которого меньше $\sqrt{3}$, заведомо нельзя заключить *каждую* фигуру диаметра 1: в такой треугольник нельзя поместить круг диаметра 1. Докажем теперь, что *каждую фигуру F диаметра 1 можно заключить внутрь правильного треугольника со стороной $\sqrt{3}$.*

Пусть a' — некоторая прямая, не пересекающая нашей фигуры F; сдвинем a' в направлении фигуры F до положения a, в котором она соприкоснется в некоторой точке A с фигурой (рис. 171). Точно таким же образом найдем прямые a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 такие, что

$$\angle(a, a_1) = \angle(a_1, a_2) = \\ = \angle(a_2, a_3) = \angle(a_3, a_4) = \\ = \angle(a_4, a_5) = \angle(a_5, a) = 60°$$

Рис. 171.

(где, например, $\angle(a, a_1)$ — угол между прямыми a и a_1), не пересекающие фигуру F и соприкасающиеся с ее границей в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 (см. тот же рис. 171). Прямые a, a_2 и a_4, а также прямые a_1, a_3 и a_5 образуют два правильных треугольника T и T_1, описанные вокруг F. Мы утверждаем, что *сторона хоть одного из этих двух треугольников не превосходит $\sqrt{3}$.*

Воспользуемся тем, что сумма расстояний MP, MQ и MR от внутренней точки M равностороннего треугольника ABC со стороной a до сторон AB, BC и CA треугольника всегда равна высоте h треугольника; в самом деле, очевидно (сделайте чертеж!):

$$\frac{1}{2}ah = S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} = \\ = \frac{1}{2}aMP + \frac{1}{2}a \cdot MQ + \frac{1}{2}a \cdot MR = \frac{1}{2}a(MP + MQ + MR),$$

и следовательно,

$$MP + MQ + MR = h.$$

Поэтому сумма расстояний MP, MP_1, MP_2, MP_3, MP_4 и MP_5 от произвольной точки M фигуры F до прямых a, a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 равна сумме высот h и h_1 треугольников T и T_1 (ибо $MP + MP_2 + MP_4 = h$ и $MP_1 + MP_3 + MP_5 = h_1$). С другой стороны, сумма $MP + MP_3$ равна расстоянию между параллельными прямыми a и a_3, откуда имеем

$$MP + MP_3 \leqslant AA_3 \leqslant 1$$

(ибо 1 — это диаметр фигуры F); точно так же доказывается, что

$$MP_1 + MP_4 \leqslant A_1A_4 \leqslant 1 \quad \text{и} \quad MP_2 + MP_5 \leqslant A_2A_5 \leqslant 1.$$

А теперь имеем

$$h + h_1 = MP + MP_1 + MP_2 + MP_3 + MP_4 + MP_5 = \\ = (MP + MP_3) + (MP_1 + MP_4) + (MP_2 + MP_5) \leqslant 3,$$

откуда и следует, что хоть одна из величин h и h_1 не превосходит $\frac{3}{2}$, а следовательно, сторона хоть одного из треугольников T и T_1 не превосходит $\sqrt{3}$ $\left(\text{ибо } \frac{3}{2} \text{ — это высота правильного треугольника со стороной } \sqrt{3}\right)$.

Второе решение. Если продолжить любые три несмежные стороны фигурирующего в условии задачи в) правильного шестиугольника $Ш$ со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$, внутрь которого можно заключить каждую фигуру F диаметра 1, то мы получим правильный треугольник T со стороной $\sqrt{3}$, также, очевидно, обладающий требуемым свойством.

94. а) Ясно, что радиус круга k может быть сколь угодно мал; с другой стороны, наибольшим он будет, если k касается всех трех сторон T (ср. ниже решение задачи 100); таким образом, $0 < r \leqslant r_0$, где r_0 — радиус *вписанного круга* T.

Аналогично круг K, разумеется, может быть сколь угодно велик; таким образом, нам остается найти *наименьший круг* K, *заключающий внутри данный треугольник* $T \equiv \triangle ABC$. Диаметр круга, содержащего внутри себя треугольник ABC, не может, разумеется, быть меньше наибольшей стороны ABC. Поэтому, *если треугольник ABC тупоугольный (или прямоугольный)*, и построенный на наибольшей его стороне круг содержит $\triangle ABC$ внутри себя, то *диаметр наименьшего содержащего $\triangle ABC$ круга совпадает с наибольшей стороной $\triangle ABC$*; в этом случае (рис. 172, а)

$$R = \frac{1}{2}$$

(ибо диаметр треугольника равен его наибольшей стороне; см. задачу 78 а)).

Покажем теперь, что *если треугольник ABC остроугольный, то наименьшим содержащим $\triangle ABC$ кругом будет описанный круг треугольника ABC*; другими словами, нам требуется установить, что если некоторый круг K_1 содержит $\triangle ABC$ внутри себя, то радиус K_1

не может быть меньше радиуса R описанного вокруг $\triangle ABC$ круга K. Обозначим центры кругов K и K_1 через O и O_1 (рис. 172, *б*). Точка O_1 лежит внутри (или на стороне) одного из трех углов AOB, BOC и COA, скажем, внутри (или на стороне) угла AOC. Если O_1 лежит на продолжении BO, то, очевидно, $O_1B > OB$, откуда и следует требуемое. Если точка O_1 не лежит на продолжении BO, то она лежит внутри (или на стороне, отличной от BO) одного из углов ABO и CBO, например угла CBO. Соединим точку O_1 с точками A, O и B. Из двух углов AOO_1 и BOO_1 по крайней мере один тупой (так как угол AOB меньше 180°, ибо треугольник ABC остроугольный, то $\angle AOO_1 + \angle BOO_1 > 180°$) — пусть это будет угол BOO_1. Тогда в треугольнике BOO_1 сторона BO меньше стороны BO_1, откуда и следует наше утверждение.

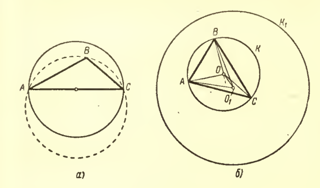


Рис. 172.

Но радиус R описанного круга $\triangle ABC$ диаметра 1, наибольший угол α которого заключается в пределах $60° \leqslant \alpha \leqslant 90°$ (последнее означает, что наш треугольник *остроугольный* или *прямоугольный*), всегда равен $\frac{1}{2\sin\alpha}$ (ср. с первым решением задачи 93 б)); наибольшее значение

$$R = \frac{1}{2\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

он принимает, если $\alpha = 60°$, и $\triangle ABC$ *равносторонний*. Этим и доказывается, что

$$\frac{1}{2} \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3};$$

причем $R = \frac{1}{2}$, если $\triangle ABC$ *тупоугольный или прямоугольный* (если наибольший угол треугольника $\alpha \geqslant 90°$) и $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$, если $\triangle ABC$ *правильный* (и его наибольший угол $\alpha = 60°$). [Таким

образом, *наибольшее* возможное значение R достигается для единственного треугольника диаметра 1, а *наименьшее* — для многих треугольников.]

Примечание. На стр. 60 отмечалось, что термин «Описанный круг (выпуклого) многоугольника» имеет в теории выпуклых фигур иной смысл, чем в школьном курсе геометрии. Результат настоящей задачи показывает, что это расхождение является существенным: для тупоугольного треугольника его описанный круг (в школьном понимании этого термина) не совпадает с Описанным кругом (в смысле данного на стр. 60 определения) — см. рис. 172, *а*, на котором пунктиром изображен описанный круг $\triangle ABC$.

Заметим еще, что ниже мы выводим результат задачи 93 б) из результата задачи 94 (см. решение задачи г)). Но можно и, наоборот, вывести результат задачи 94 а) из решения задачи 93 б), где было показано, что наименьший содержащий фигуру F (в данном случае $\triangle ABC$) круг либо содержит две диаметрально противоположные точки F (случай тупоугольного или прямоугольного треугольника), либо содержит три точки F, не принадлежащие одной полуокружности (случай остроугольного треугольника).

б) Нетрудно видеть, что если круг $\varkappa$ пересекает (не касается, а именно пересекает) каждый из отрезков AB, BC и CA, то его можно уменьшить с соблюдением требований задачи (ср. с решением задачи 100); поэтому наименьшим из удовлетворяющих условиям задачи кругов (точнее — предельным для уменьшающихся по радиусу кругов $\varkappa$) будет *вписанный круг* треугольника, касающийся всех сторон T. Таким образом, $\inf \rho = r_0$, где r_0 — радиус вписанного круга T (относительно обозначений см. стр. 17).

Аналогично этому, если круг $\varkappa$ пересекает отрезки AB, BC, CA и ограничивающая его окружность σ не проходит ни через одну из вершин треугольника T, то $\varkappa$ можно увеличить, не нарушая наложенных на него требований (ср. с решением задачи а)). Таким образом, можно добиться, чтобы окружность σ круга $\varkappa$ прошла сначала через одну, а затем и через две вершины треугольника T; при этом, если σ проходит через точки B и C, то можно считать, что $\varkappa$ пересекает отрезок $BC = a$. Предположим далее, что σ пересекает второй раз отрезок AB в точке D. Если D смещается по стороне AB, двигаясь от A к B, то (в том случае, когда $\angle A$ треугольника T — острый) радиус ρ окружности σ сначала уменьшается, пока D проходит отрезок AP (где P — основание высоты CP треугольника), а затем начинает увеличиваться (если $\angle A$ тупой, то ρ только увеличивается, когда D двигается от A к B; объясните сами эти закономерности). Таким образом, «предельными» по величине (самыми большими!) здесь будут отвечающий совпадению точки D с вершиной A круг, описанный вокруг $\triangle ABC \equiv T$ $\left(\text{его радиус равен } \frac{a}{2\sin A}\right)$ и (отвечающий совпадению точки D с вершиной B) круг, проходящий через точки C и B и касающийся стороны BA в вершине B (его радиус равен $\frac{a}{2\sin B}$, ибо хорде BC длины a здесь отвечает вписанный угол величины B). Впрочем, последний круг можно считать пересекающим отрезок AC лишь в том случае, если $\angle B \geqslant \angle C$ (сделайте сами чертеж; почему?); в противном же случае роль «предельного» круга $\varkappa$ будет

играть проходящий через точки B и C круг, касающийся прямой CA в точке C; его радиус равен $\frac{a}{2\sin B}$.

Таким образом, если $a \geqslant b \geqslant c$ и, соответственно этому, $A \geqslant B \geqslant C$, то «участвовать в конкурсе на звание наибольшего по величине круга $\varkappa$» могут лишь круг радиуса $\frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$ (описанный круг треугольника T) и круги радиусов $\frac{a}{2\sin B}$, $\frac{b}{2\sin A}$, $\frac{c}{2\sin A}$. Ясно, что наибольшим из этих кругов является круг радиуса $\frac{a}{2\sin B}$, проходящий через концы B и C наибольшей стороны $BC = a$ и касающийся в точке B наименьшей стороны AB; поэтому окончательно имеем

$$r_0 < \rho < \frac{a}{2\sin B}$$

(где радиус r_0 *вписанного* круга легко, разумеется, также выразить через длины сторон и углы треугольника T — это можно даже сделать многими разными способами).

в) Ясно, что если KM_1, KM_2, $KM_3 \leqslant P$, то круг с центром K и радиусом P полностью покрывает $\triangle M_1M_2M_3$; таким образом, наша задача сводится к задаче а) о наименьшем круге, целиком покрывающем данный $\triangle\ M_1M_2M_3$. Отсюда следует, что кошка K должна занять позицию в центре описанного вокруг $\triangle M_1M_2M_3$ круга, если $\triangle M_1M_2M_3$ *остроугольный* (или *прямоугольный*), и в середине наибольшей стороны $\triangle M_1M_2M_3$, если этот треугольник *тупоугольный* (или *прямоугольный*); при этом во всех случаях положение K кошки определяется однозначно.

г) Пусть A, B, C — такие три из данных n точек, что *наименьший содержащий их круг* K *не меньше наименьшего круга, содержащего любые другие три из наших точек.* Мы утверждаем, что *все наши точки лежат внутри круга* K; отсюда и из результата задачи а) уже сразу следует предложение задачи 93 б). Допустим, что это не так: пусть одна из наших точек (обозначим ее D) лежит вне K. Рассмотрим два случая.

1°. Треугольник ABC — тупоугольный или прямоугольный (рис. 173, *а*). Если C — вершина тупого (прямого) угла, то в силу результата задачи а) K есть круг с диаметром AB. Если точки A, B и D лежат на одной прямой (рис. 173, *а*), то, очевидно, наименьший содержащий их круг имеет диаметр $AD > AB$, что противоречит условию выбора точек A, B и C. Если точки A, B, D образуют остроугольный треугольник (рис. 173, *б*), то в силу результата той же задачи наименьший содержащий их круг есть описанный круг, диаметр которого превосходит любую из сторон, в частности превосходит AB, что снова противоречит нашему предположению. Если же, наконец, треугольник ABD тупоугольный или прямоугольный (рис. 173, *в*), то, так как угол при вершине D обязательно острый (иначе D не может лежать вне круга K), сторона, лежащая в этом треугольнике против тупого или прямого угла, больше AB. Радиус же наименьшего круга, содержащего точки A,

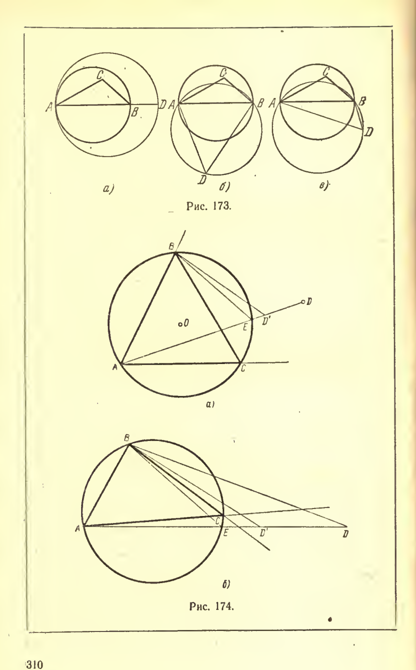


Рис. 173.

Рис. 174.

B, D, равен половине этой стороны, — и мы снова приходим к противоречию.

2°. Треугольник ABC — остроугольный (рис. 174). Найдется такая сторона этого треугольника, что треугольник ABC и точка D находятся по одну сторону от прямой, на которой лежит эта сторона. Пусть для определенности это будет сторона AB.

Точка D лежит внутри (или на стороне) одного из трех углов CAB, CBA и угла, вертикального с углом ACB. Если имеет место один из первых двух случаев, например, если D лежит внутри (или на стороне) угла CAB (рис. 174, *а*), то соединим точку D с точкой A; пусть E есть вторая точка пересечения отрезка AD с окружностью круга K. Если AE — диаметр круга K, то AD больше диаметра K, и круг, содержащий A и D, не может быть меньше K, т. е. мы приходим к противоречию. Если же AE не есть диаметр K, то центр K лежит внутри одного из треугольников AEC и AEB и, значит, один из этих треугольников (например, AEB) остроугольный. Пусть D' — такая точка отрезка ED, что и треугольник $AD'B$ остроугольный, т. е. угол ABD' острый (в частности, точка D' может и совпадать с D). Наименьший круг, содержащий треугольник $AD'B$, есть описанный круг; но этот круг больше, чем круг, описанный вокруг треугольника AEB, т. е. чем K (это следует из того, что в этом круге на сторону AB опирается меньший угол). С другой стороны, всякий круг, содержащий точки A, D, B, содержит также и точки A, D', B, т. е. мы снова пришли к противоречию.

Нам осталось еще рассмотреть случай, когда точка D лежит внутри или на стороне угла, вертикального с углом ACB (рис. 174, *б*). В этом случае соединим точку D с A и B; хоть один из углов DAB или DBA будет острым; пусть, например, угол DAB острый; E — точка пересечения отрезка DA с окружностью круга K. Треугольник AEB остроугольный ($\angle AEB = \angle ACB$, $\angle EBA < < \angle CBA$ и $\angle EAB$ острый по предположению). Дальше повторяются те же рассуждения, что и выше.

95. а) Рассмотрим множество центров наших кругов. Так как каждые три круга имеют общую точку, то для каждых трех центров кругов найдется точка Q, удаленная от каждого из этих центров не более чем на r, где r — общий радиус всех кругов системы (этим свойством обладает общая точка трех кругов с центрами в наших точках). Круг с центром в этой точке Q и радиусом r заключает внутри себя три рассматриваемые точки (центры кругов нашей совокупности); таким образом, *каждые три из центров кругов можно заключить в круг радиуса r*. Рассмотрим теперь достаточно большой круг, содержащий внутри все наши точки, — пусть этот круг ограничен и он уменьшается, стягивая наши точки. Ясно (близкие соображения использовались в решении задачи 93 б), а по существу — и в решении задачи 94 а)), что наш «стягивающийся» круг смогут задержать лишь две точки, попавшие на его периферию и являющиеся для круга диаметрально противоположными, или три точки, являющиеся вершинами вписанного в наш круг остроугольного треугольника. Но поскольку расстояние между любыми двумя точками $\leqslant r$ и каждые три точки можно заключить в круг радиуса $\leqslant r$, то отсюда следует, что *все центры кругов можно заключить в круг радиуса r*. Последнее же утверждение означает, что найдется точка O — центр этого содержащего все точки круга, — удаленная от центров всех наших

кругов не более чем на r. Ясно, что эту точку O будут содержать все круги нашей совокупности кругов.

б) Построим круги радиусов $\frac{\sqrt{3}}{3}$ с центрами во всех наших точках. Если диаметр совокупности точек равен 1, то диаметр любого треугольника с вершинами в данных точках $\leqslant 1$. Отсюда и из решения задачи а) следует, что для каждых трех из наших точек найдется точка Q — центр наименьшего круга, покрывающего эти три точки, — удаленная от каждой из трех точек на расстояние $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$; поэтому каждые три из наших кругов будут иметь общую точку Q — будут пересекаться. Но тогда в силу результата задачи а) все наши круги будут пересекаться. Их общая точка O удалена на расстояние $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ от каждой из n точек; поэтому круг радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$ с центром O покрывает все наши n точек.

96. а) Мы знаем (см. задачу 93 а)), что каждую фигуру диаметра 1 можно заключить внутрь квадрата K со стороной 1. Если теперь провести четыре касательных к вписанному в K кругу, подобных изображенным на рис. 43, *б*, которые отсекают от K четыре треугольника Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4 (рис. 175, *а*), то, как легко видеть,

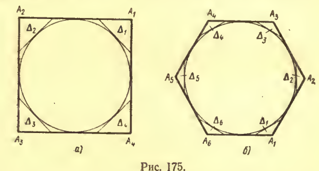


Рис. 175.

каждая (внутренняя) точка, скажем, треугольник Δ_1, удалена от каждой (внутренней) точки треугольника Δ_3 на расстояние $\geqslant 1$, и поэтому, если Δ_1 содержит внутри точки фигуры F (диаметра 1), то Δ_3 не может содержать таких точек, и наоборот. Точно то же самое можно утверждать и про треугольники Δ_2 и Δ_4; поэтому, если мы покрыли фигуру F диаметра 1 квадратом K, то по крайней мере один из каждых двух треугольников Δ_1 и Δ_3, Δ_2 и Δ_4 является «пустым». Последнее утверждение можно расшифровать как утверждение о том, что «пустыми» являются либо Δ_1 и Δ_2; либо Δ_1 и Δ_4; либо Δ_3 и Δ_2; либо Δ_3 и Δ_4, т. е. во всех случаях какие-то два *соседних* из треугольников Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4, — что и доказывает предложение, составляющее содержание настоящей задачи.

б) Мы будем рассуждать почти так же, как при решении задачи а), однако теперь мы исходим не из квадрата K, а из фигу-

рирующей в задаче 93 в) шестиугольной «покрышки» $Ш$. Отсечем от $Ш$ шесть «уголков» Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5 и Δ_6, представляющих собой треугольники, ограниченные двумя сторонами угла шестиугольника $Ш$ и касательной к вписанной в $Ш$ окружности, перпендикулярной биссектрисе рассматриваемого угла (рис. 175, *б*). Так как по-прежнему все (внутренние) точки, скажем, треугольника Δ_1 удалены от любой (внутренней) точки треугольника Δ_4 на расстояние $\geqslant 1$, то при покрытии шестиугольником $Ш$ произвольной фигуры F диаметра 1 хоть один из каждых двух треугольников Δ_1 и Δ_4, Δ_2 и Δ_5, Δ_3 и Δ_6 останется «пустым». Здесь всего мы имеем восемь вариантов троек «пустых» треугольников, которые можно получить, выбирая по одному треугольнику из каждой пары: Δ_1, Δ_2, Δ_3; Δ_1, Δ_2, Δ_6; Δ_1, Δ_5, Δ_3; Δ_1, Δ_5, Δ_6; Δ_4, Δ_2, Δ_3; Δ_4, Δ_2, Δ_6; Δ_4, Δ_5, Δ_3; Δ_4, Δ_5, Δ_6. Но нетрудно видеть, что каждая из этих восьми троек треугольников содержит два не соседние (и не противоположные) треугольника, — чем и доказывается, что изображенным на рис. 43, *д* восьмиугольником можно покрыть любую фигуру F диаметра 1.

97. а) Пусть S — середина ломаной AB, т. е. такая точка, что ломаные AS и SB имеют одну и ту же длину 1/2. В таком случае каждая точка M ломаной такова, что длина ломаной SM не превосходит 1/2, и тем более расстояние $SM \leqslant 1/2$, откуда следует, что круг радиуса 1/2 с центром S целиком покрывает ломаную. Таким образом, *каждую ломаную длины* 1 *можно покрыть кругом радиуса* 1/2, и число 1/2 уменьшить нельзя, ибо *отрезок* длины 1 невозможно, очевидно, покрыть кругом радиуса $<1/2$.

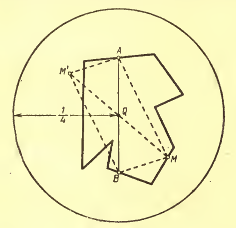


Рис. 176.

б) Докажем, что *всякую плоскую замкнутую ломаную периметра* 1 *можно заключить внутрь круга радиуса* 1/4. Пусть A — произвольная точка нашей ломаной, B — такая точка ломаной, что обе части ломаной, соединяющие точки A и B, имеют одну и ту же длину 1/2, Q — середина отрезка AB (рис. 176). Проведем окружность радиуса 1/4 с центром в точке Q. Мы утверждаем, что

вся ломаная будет заключаться внутри этой окружности, т. е. что расстояние от любой точки M ломаной до точки Q не больше 1/4. Действительно, пусть M' — точка, симметричная M относительно точки Q. Соединим M и M' с точками A и B. Так как AM не больше части ломаной, заключенной между точками A и M, а BM не больше части ломаной, заключенной между точками B и M, то $AM + BM$ не больше части ломаной, заключенной между точками A и B, т. е. не больше 1/2. Но из рис. 176 нетрудно усмотреть, что $AM = BM'$, $BM = AM'$, $QM = QM'$. Из рассмотрения $\triangle AMM'$ вытекает, что

$$MM' = 2QM \leqslant AM + AM' = AM + BM \leqslant 1/2,$$

откуда

$$QM \leqslant 1/4,$$

а это нам и требовалось доказать.

С другой стороны, диаметр ломаной периметра 1 может быть сколь угодно близок к 1/2 (так будет, например, в том случае, если ломаная представляет собой ромб со стороной 1/4 и очень малым острым углом). А так как *диаметр круга*, содержащего ломаную, очевидно, не может быть меньше *диаметра ломаной*, то никакой круг радиуса, меньшего 1/4, не может покрывать любую плоскую замкнутую ломаную периметра 1. Следовательно, искомое значение радиуса круга равно 1/4.

98. а) Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной a и проведем через вершину C прямую CF, образующую со стороной CA небольшой угол φ (здесь F — точка стороны AB, рис. 177, a).

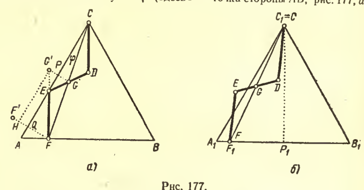


Рис. 177.

Пусть далее G — середина отрезка CF, E — произвольная точка стороны AC треугольника, GDC — ломаная, симметричная ломаной GEF относительно точки G. Если $\angle CFE < \angle FCB$, то (трехзвенная) ломаная $CDEF$ целиком заключается внутри треугольника ABC.

С другой стороны, нетрудно видеть, что *ни в какой равносторонний треугольник, меньший треугольника ABC, ломаная $CDEF$ не может быть заключена.* В самом деле, пусть равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ меньше треугольника ABC, и пусть даже ломаная $CDEF$ сдвинута так, что ее конец C совпадает с одной из вершин — скажем, с вершиной C_1 — этого треугольника (самое вы-

годное для нас расположение ломаной!). Предположим еще, что $\angle A_1C_1F < \frac{1}{2} \angle A_1C_1B_1 = 30^\circ$ (в противном случае мы отразим просто ломаную от высоты C_1P_1 треугольника); точку пересечения C_1F и A_1B_1 обозначим через F_1 (рис. 177, б). Из сравнения треугольников ACF и $A_1C_1F_1$ (где $A_1C_1 < AC = a$, $C_1F_1 \geqslant CF$ и $\angle C_1A_1F_1 = \angle CAF = 60^\circ$; здесь мы исходим из того, что точка F заключена в н у т р и $\triangle A_1C_1F_1$ [1])) вытекает, что $\angle A_1F_1C_1 > \angle AFC$ (ибо

$$\frac{\sin \angle A_1F_1C_1}{\sin 60^\circ} = \frac{A_1C_1}{C_1F_1} < \frac{AC}{CF} = \frac{\sin \angle AFC}{\sin 60^\circ},$$

и оба угла $A_1F_1C_1$ и AFC тупые), а значит, $\angle A_1C_1F_1 < \angle ACF$; но в таком случае лежащая по ту же сторону от C_1F_1, что и точка A_1, вершина E ломаной $CDEF$ выйдет за пределы треугольника $A_1C_1F_1$, а значит, ломаная $CDEF$ никак не вместится в треугольник $A_1C_1B_1$.

Оценим теперь длину ломаной $CDEF$. Для того чтобы длина ломаной GEF (составляющей половину всей ломаной $CDEF$) была наименьшей возможной, надо, чтобы имело место равенство $\angle FEA = \angle GEC$ или чтобы прямая FE проходила через точку G', симметричную точке G относительно стороны AC треугольника ABC (рис. 177, а; ср. выше решение задачи 86в)). При этом, очевидно,

$$FE + EG = FE + EG' = FG',$$

так что нам остается лишь определить длину отрезка FG'.

Пусть теперь точка F' симметрична точке F относительно прямой AC; через P и Q мы обозначим основания перпендикуляров, опущенных из точек G и F на прямую CA (точки пересечения GG' и FF' с CA); из точки G' опустим перпендикуляр $G'H$ на прямую FF'. В таком случае

$$FG' = \sqrt{FH^2 + G'H^2};$$

кроме того,

$$G'H = PQ = \frac{1}{2} CQ$$

и

$$FH = FQ + QH = FQ + PG' = FQ + GP = FQ + \frac{1}{2} FQ = \frac{3}{2} FQ$$

($PQ = \frac{1}{2} CQ$ и $GP = \frac{1}{2} FQ$, ибо GP — средняя линия треугольника CFQ). А так как из рассмотрения $\triangle CFQ$ и $\triangle CFA$ заключаем:

$$CQ = CF \cos \varphi \quad \text{и} \quad FQ = CF \sin \varphi,$$

а

$$CF = CA \frac{\sin \angle CAF}{\sin \angle CFA} = \frac{a \sin 60^\circ}{\sin (60^\circ + \varphi)},$$

---

[1]) На рис. 177, б изображен самый выгодный нам случай, когда $F_1 \equiv F$ и $C_1F_1 \equiv CF$.

то окончательно имеем

$$CD+DE+EF=2FG'=2\sqrt{\left(\frac{3}{2}CF\sin\varphi\right)^2+\left(\frac{1}{2}CF\cos\varphi\right)^2}=$$

$$=\frac{2a\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\sqrt{\frac{9}{4}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{a\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\sqrt{1+8\sin^2\varphi}$$

$\Big($ибо $\sqrt{\frac{9}{4}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+8\sin^2\varphi}=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{1+8\sin^2\varphi}\Big)$.

Мы утверждаем, что *при малом угле* φ *длина* $\frac{a\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\times$ $\times\sqrt{1+8\sin^2\varphi}$ *ломаной* $CDEF$ *будет меньше* a. Доказательство этого несложно, однако оно требует некоторого внимания [1]). Если угол φ очень мал, то величина $\sin\varphi$ очень близка к самому углу φ $\Big($в радианной мере; ведь известно, что $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1\Big)$; с другой стороны, $\cos\varphi=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\approx 1-2\cdot\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2=1-\frac{\varphi^2}{2}$, так что

$$\sin(60^\circ+\varphi)=\sin 60^\circ\cos\varphi+\cos 60^\circ\sin\varphi\approx$$

$$\approx\sin 60^\circ\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)+\cos 60^\circ\cdot\varphi=\sin 60^\circ+\cos 60^\circ\cdot\varphi-\frac{\sin 60^\circ}{2}\varphi^2=$$

$$=\sin 60^\circ\left(1+\operatorname{ctg}60^\circ\cdot\varphi-\frac{1}{2}\varphi^2\right).$$

Далее,

$$\frac{a\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\sqrt{1+8\sin^2\varphi}=a\,\frac{\sqrt{1+8\sin^2\varphi}}{\dfrac{\sin(60^\circ+\varphi)}{\sin 60^\circ}},$$

---

[1]) Читатель, знакомый с основами дифференциального исчисления, может гораздо проще доказать, что при малых φ длина $\frac{a\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\sqrt{1+8\sin^2\varphi}$ ломаной $CDEF$ будет меньше a: для этого достаточно заметить, что при $\varphi=0$ наше выражение обращается в a, и проверить, что при $\varphi=0$ *производная* $\Big(\frac{a\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\times$ $\times\sqrt{1+8\sin^2\varphi}\Big)$ по переменной φ *отрицательна* $\Big($и значит, функция $f(\varphi)=\frac{a\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\sqrt{1+8\sin^2\varphi}$ при возрастании φ убывает$\Big)$.

так что нам надо лишь оценить множитель $\dfrac{\sqrt{1+8\sin^2\varphi}}{\dfrac{\sin(60^\circ+\varphi)}{\sin 60^\circ}}$, установив, что он меньше 1. Но при малых φ

$$\frac{\sqrt{1+8\sin^2\varphi}}{\dfrac{\sin(60^\circ+\varphi)}{\sin 60^\circ}} \approx \frac{\sqrt{1+8\varphi^2}}{1+\operatorname{ctg} 60^\circ\cdot\varphi-\dfrac{1}{2}\varphi^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+8\varphi^2}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\varphi-\dfrac{1}{2}\varphi^2\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+8\varphi^2}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\varphi-\dfrac{2}{3}\varphi^2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\varphi^3+\dfrac{1}{4}\varphi^4}}.$$

А так как при малом φ величина $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\varphi$ будет значительно больше чем $8\varphi^2$ $\left(\text{а также и чем } \dfrac{2}{3}\varphi^2,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\varphi^3 \text{ и } \dfrac{1}{4}\varphi^4\right)$, то знаменатель дроби, стоящей в последнем выражении под знаком радикала, будет больше числителя, и значит, вся дробь будет *меньше* 1.

Итак, мы установили, что можно найти такой угол φ, что длина l полученной ломаной будет меньше a[1]). Поэтому можно найти такую ломаную *CDEF*, длина l которой *равна* 1, в то время как сторона a наименьшего равностороннего треугольника, в который можно заключить ломаную, будет *больше* 1. Но в таком случае в треугольник со стороной b, где $a > b > 1$, заведомо нельзя будет заключить любую ломаную длины 1 — так, например, в этот треугольник нельзя будет заключить найденную ломаную *CDEF*.

Примечание. С помощью дифференциального исчисления нетрудно подсчитать, что выражение $\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\varphi)}\sqrt{1+8\sin^2\varphi}$ достигает своего минимума при $\varphi=\varphi_0\approx 3{,}67^\circ$; этот минимум равен $l_0\approx 0{,}982$. Таким образом, *длина стороны наименьшего треугольника, в который можно поместить построенную ломаную CDEF, отвечающую углу* $\varphi_0\approx 3{,}67^\circ$, *равна* $\dfrac{1}{l_0}\approx 1{,}018$. Существует предположение, что это значение является «самым лучшим» в том смысле, что *в каждый равносторонний треугольник со стороной* $a\geqslant\dfrac{1}{l_0}\approx 1{,}018$ *можно заключить каждую ломаную* (и даже

---

[1]) С помощью таблиц легко найти, например, что

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin 61^\circ}\sqrt{1+8\sin^2 1^\circ}\approx 0{,}99<1.$$

более того — каждую кривую) *длины* 1, в то время как в правильный треугольник со стороной $b < \frac{1}{l_0}$ нельзя заключить, например, построенную выше ломаную $CDEF$; однако это предположение (высказанное видным английским математиком А. С. Безиковичем [88]) никем до сих пор не доказано.

б) Пусть $MN \ldots T$ — выпуклая ломаная, A_1L — луч, расположенный по ту же сторону от прямой MT, что и ломаная $MN \ldots T$, и образующий с этой прямой угол $LA_1T = 60°$; при этом точку A_1 мы выберем на продолжении TM за точку M так далеко от этой точки, что луч A_1L не задевает ломаную $MN \ldots T$. Будем двигать точку A_1 по направлению к точке M до тех пор, пока луч A_1L не «упрется» в ломаную $MN \ldots T$; это положение луча мы обозначим через AK, а точку (или одну из точек) его соприкосновения с ломаной $MN \ldots T$ — через P (точка P может и совпадать с M; рис. 178, *а*, *б*). Отложим на луче AK отрезок $AC = 1$ и построим

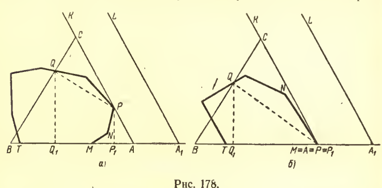


Рис. 178.

равносторонний треугольник ABC со стороной 1, стороны AC и AB которого принадлежат лучам AK и AT. Мы утверждаем, что *если длина ломаной $MN \ldots T$ не превосходит 1, то эта ломаная целиком принадлежит построенному треугольнику ABC.*

В самом деле, пусть наше утверждение не имеет места и дуга $P \ldots T$ ломаной пересекает сторону CB треугольника ABC в (отличной от B!) точке Q, как это изображено на рис. 178, *а*, *б*. Проекции точек P и Q на прямую AB обозначим через P_1 и Q_1; так как $\angle PAP_1 = \angle QBQ_1 = 60°$, то, очевидно, $PP_1 \geqslant AP_1$ (знак равенства относится к тому случаю, когда точка A совпадает с P и длины обоих «отрезков» AP_1 и PP_1 обращаются в 0; рис. 178, *б*) и $QQ_1 > Q_1B$; кроме того, очевидно, $PQ \geqslant P_1Q_1$. А теперь имеем

$$\text{дл. } MN \ldots T = \text{дл. } M \ldots P + \text{дл. } P \ldots Q + \text{дл. } Q \ldots T \geqslant$$
$$\geqslant P_1P + PQ + QQ_1 > AP_1 + P_1Q_1 + Q_1B = AB = 1,$$

что противоречит нашему предположению о том, что дл. $MN \ldots T \leqslant 1$.

Таким образом, *сторона наименьшего правильного треугольника, внутрь которого можно поместить л ю б у ю выпуклую ломаную длины* 1, *равна* 1.

99. а) Пусть S_0 — какая-то окружность, пересекающая все n наших прямых. Будем последовательно уменьшать эту окружность. Прежде всего, если окружность S_0 не касается никакой из наших прямых, то ее можно заменить концентрической с ней меньшей окружностью S_1, касающейся одной из прямых (а именно той, которая дальше всего отстоит от центра S_0 — рис. 179, *а*). Далее, если S_1 касается е д и н с т в е н н о й нашей прямой a, то мы можем еще уменьшить S_1, сохраняя точку касания S_1 с a и приближая

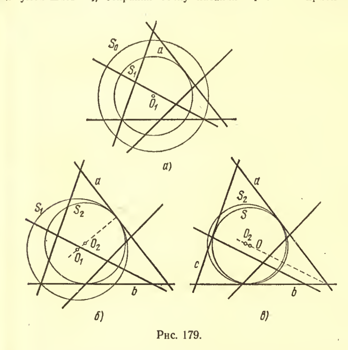


Рис. 179.

центр S_1 по перпендикуляру к a до тех пор, пока полученная окружность S_2 не коснется еще одной прямой b (см. рис. 179, *б*). Далее, если окружность S_2 касается только двух непараллельных прямых a и b, или если она касается большего числа прямых, но содержит ограниченную точками касания с прямыми a и b дугу, большую 180° и свободную от точек касания с другими нашими прямыми, то эту окружность можно продолжать уменьшать, оставляя ее касающейся прямых a и b — для этого достаточно сдвинуть центр окружности по биссектрисе образованного прямыми a и b угла, приближая его к точке пересечения a и b (рис. 179, *в*). Таким образом, мы убеждаемся, что *существует окружность S, пересекающая все наши прямые и либо касающаяся двух параллельных прямых a и b, либо касающаяся трех прямых a, b и c, образующих описанный вокруг S треугольник* (ср. с первым решением задачи 93 б)).

Но ясно, что если среди наших прямых есть две параллельные прямые a и b, то радиус никакой пересекающей их окружности не может быть меньше половины расстояния между прямыми; поэтому расстояние между a и b не больше 2, а значит, радиус нашей окружности S не больше 1. Если же среди наших прямых есть три прямые a, b и c, образующие описанный вокруг S треугольник, то никакая окружность, пересекающая a, b и c, не может быть меньше S: в самом деле, в этом случае три полосы ширины $<2r$ (где r — радиус S), для которых прямые a, b и c являются средними линиями, не имеют общих им всем точек (рис. 180) и, значит,

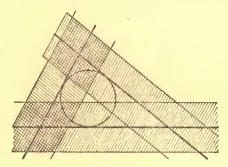


Рис. 180.

не существует точки, удаленной и от a, и от b, и от c на расстояние, меньшее r. Поэтому в этом случае $r \leqslant 1$, что нам и требовалось доказать.

б) В силу результата задачи а) нам достаточно доказать, что *каждые три* из рассматриваемых прямых можно пересечь кругом радиуса $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Но наши три прямые образуют треугольник, каждая сторона которого $\leqslant 1$; поэтому периметр P треугольника $\leqslant 3$. Обозначим через r радиус вписанного круга этого треугольника. В силу результата задачи 72 б) из всех описанных вокруг круга радиуса r треугольников наименьший периметр P (равный, как легко видеть, $6\sqrt{3}\,r$) имеет п р а в и л ь н ы й треугольник; поэтому для любого треугольника величины r и P связаны неравенством $6\sqrt{3}\,r \leqslant P$, или $r \leqslant \frac{P\sqrt{3}}{18}$. А так как в нашем случае $P \leqslant 3$, то $r \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, что и доказывает требуемое утверждение.

То, что оценку задачи улучшить нельзя, показывает пример *трех сторон правильного треугольника* со стороной 1.

100. а) Решение этой задачи очень похоже на решение задачи 93 б). Заметим прежде всего, что *наибольший круг k, заключающийся внутри выпуклого многоугольника M, обязательно касается либо двух параллельных сторон M, либо трех сторон M, образующих описанный вокруг k треугольник.* В самом деле, если круг k не касается ни одной стороны M, то мы можем, не меняя центра k,

«раздувать» его до тех пор, пока он не коснется стороны M (рис. 181, *а*). Далее, если k касается единственной стороны a многоугольника M, то мы также можем увеличить k, не выводя его за пределы многоугольника M; для этого достаточно сдвинуть слегка k перпендикулярно a, отодвинув его от a, а затем увеличить k прежним способом (рис. 181, *б*). Наконец, если k касается двух непараллельных сторон a и b многоугольника M, то мы также можем увеличить k, предварительно сдвинув его слегка в направлении биссектрисы образованного a и b угла (рис. 181, *в*);

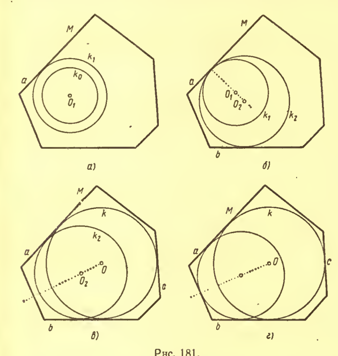


Рис. 181.

также можно поступить и в том случае, когда k касается трех (или более) сторон M, не образующих описанного вокруг k треугольника (рис. 181, *г*).

Но если наибольший круг k из всех кругов, заключающихся внутри M (Вписанный круг M в смысле приведенного на стр. 60 определения) касается двух параллельных сторон l_1 и l_2 многоугольника M (рис. 182, *а*), то его радиус r равен половине ширины, образованной прямыми l_1 и l_2 полосы, и значит, $r = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, так как ширина этой полосы в силу условия задачи равна здесь 1. Пусть теперь круг k радиуса r касается трех сторон l_1, l_2 и l_3 многоугольника M, образующих описанный вокруг k (и одновременно

вокруг M!) треугольник ABC (рис. 182, *б*). Обозначим стороны $\triangle ABC$ через a, b и c, а его высоты — через h_a, h_b и h_c; пусть еще $a \geqslant b \geqslant c$ и, значит, $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$. Так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}ah_a,$$

то

$$h_a = \frac{a+b+c}{a} \cdot r = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) r \leqslant 3r,$$

и, значит,

$$r \geqslant \frac{1}{3} h_a.$$

Но высота h_a описанного вокруг M треугольника ABC никак не может быть меньше ширины 1 многоугольника (см. рис. 182, *б*); поэтому $h_a \geqslant 1$ и

$$r \geqslant \frac{1}{3},$$

что нам и требовалось доказать.

б) Равенство $r = \frac{1}{3}$ имеет место, скажем, если M есть *правильный треугольник* ширины 1 — равносторонний треугольник

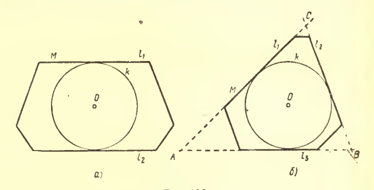


Рис. 182.

с высотой 1: ясно, что в него нельзя заключить никакого круга радиуса $\geqslant \frac{1}{3}$.

101. а) Ясно, что разбиение множества точек на три части, удовлетворяющее условию задачи, легко произвести в том случае, когда число n точек равно 2 (при этом одна из частей будет даже обязательно «пустой», т. е. не будет содержать ни одной точки) или $n = 3$. Воспользуемся теперь м е т о д о м м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и: предположим, что для каждой совокупности из n точек утверждение задачи доказано, и покажем, что в таком случае оно будет справедливо и для совокупности из $n + 1$ точек,

Из результата задачи 87 а) вытекает, что либо каждая точка системы m точек является концом ровно двух «диаметров» системы, либо хоть одна точка является концом единственного диаметра (ибо в противоположном случае общее число диаметров было бы больше m; ср. с решением задачи 87 а)). Таким образом, в нашей системе $n+1$ точек наверняка найдется точка A, являющаяся концом *не более чем двух диаметров*. Исключив из рассмотрения точку A, мы получим систему n точек, которую, согласно предположению индукции, можно разбить на три части меньшего диаметра. Присоединив теперь точку A к той подсистеме, которая не содержит концов исходящих из A диаметров, мы разобьем $n+1$ точек на три части меньшего диаметра.

б) Распределим множество вершин многоугольника[1] M между тремя подмножествами, каждое из которых имеет диаметр, меньший диаметра всего множества вершин многоугольника. Далее, разобьем весь многоугольник на три части так, чтобы порожденное этим разбиением многоугольника распределение множества вершин многоугольника на три подсистемы было именно тем, о котором было сказано в начале решения задачи. При этом в силу результата задачи 78 а)[2] каждая часть многоугольника M будет иметь меньший диаметр, чем весь многоугольник.

102. а) Решение этой задачи очень близко к решению задачи 101 а). Ясно, что если число точек $n \leqslant 4$, то требуемое разбиение совокупности n точек на четыре части возможно (при $n < 4$ некоторые из частей будут даже «пустыми»). Предположим теперь, что мы уже доказали возможность распределения между четырьмя совокупностями точек меньшего диаметра системы из n точек и рассмотрим систему из $n+1$ точек. Заметим, что из результата задачи 87 б) вытекает, что в любой совокупности m точек диаметра 1 имеется точка, из которой исходят не более трех диаметров системы. В самом деле, если бы из каждой точки исходило не менее четырех диаметров, то общее число диаметров в системе m точек было бы не менее чем

$$\frac{1}{2}(4m) = 2m$$

(ибо из каждой из m точек исходит четыре или большее число диаметров и каждый диаметр имеет два конца), в то время как число диаметров не может превосходить $2m-2$. Исключив теперь из системы $n+1$ точек одну точку A, из которой исходит не более трех диаметров, мы в силу предположения индукции сможем разбить оставшиеся n точек на четыре части с соблюдением условия задачи; после этого нам останется лишь присоединить точку A к той части, в которой нет конца ни одного из исходящих из A диаметров.

б) Разобьем на четыре части совокупность вершин многогранника М с соблюдением условий задачи а); затем разобьем на

[1]) Нетрудно заметить, что требование *выпуклости* многоугольника M в приведенном рассуждении не используется.

[2]) Ссылка на результат задачи 78 а) подразумевает, что в качестве вершин (многоугольных) частей M выступают лишь какие-то вершины всего многоугольника (чего легче достигнуть, если многоугольник M *выпуклый*; ср. с подстрочным примечанием на стр. 93).

четыре части сам многогранник так, чтобы при этом вершины многогранника распределились между четырьмя его частями в соответствии с уже установленным их распределением. В силу результата задачи 78 б) диаметр каждой из четырех частей многогранника будет меньше диаметра самого многогранника.

103. а) В этой задаче речь идет о разбиении *круга Кр* единичного диаметра на n «возможно меньших» частей $F_1, \ldots F_n$, причем выражение «возможно меньших» имеет следующий точный смысл: требуется, чтобы *диаметр наибольшей* (*по диаметру*) *из частей был возможно меньше* (т. е. ищется величина $\min\limits_i \max F_i$). Далее мы будем рассматривать отдельно разные значения n.

1°. $n = 1$. Равенство $\delta(1, Kp) = 1$ очевидно: ведь $\delta(1, F) = 1$ для всех F.

2°. $n = 2$. Ясно, что если разбить круг Kp на *две* части F_1 и F_2, то тем самым разобьется на две части f_1 и f_2 также и ограничивающая Kp окружность Okp. (Если вся окружность Okp целиком принадлежит одной из частей F_1 или F_2 круга Kp, то диаметр соответствующей части Kp будет равен 1.) Пусть A — одна из точек соприкосновения участков f_1 и f_2 окружности Okp (каждый из которых может состоять из многих частей), а B — точка, *диаметрально противоположная* A. Ясно, что та из частей f_1 и f_2 окружности Okp, которая содержит точку B, имеет диаметр 1; поэтому

$$\delta(2, Kp) = 1 \qquad (= \delta(1, Kp)).$$

3°. $n = 3$. Если круг Kp разбит на *три* части F_1, F_2 и F_3, то тем самым и ограничивающая Kp окружность Okp разбита на три части f_1, f_2 и f_3. (Здесь также можно игнорировать возможность того, что какая-то из частей F_1, F_2 и F_3 круга Kp вовсе не содержит точек Okp.) При этом (дуговая) длина хоть одной из частей f_1, f_2 и f_3 окружности Okp (каждая из которых может состоять из многих дуг) будет $\geqslant 120°$; но в таком случае эта часть Okp обязательно содержит точки, отстоящие одна от другой на дуговое расстояние $\geqslant 120°$, т. е. такие точки, что соединяющая их хорда стягивает дугу $\geqslant 120°$, и значит, сама хорда $\geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ибо $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$ есть длина хорды круга Kp, стягивающей дугу в 120°). Разбить круг Kp на три части диаметра $\frac{\sqrt{3}}{2}$, очевидно, можно (рис. 183, *а*); поэтому

$$\delta(3, Kp) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4°. $n = 4$, 5 или 6. Совершенно как выше, заключаем, что если круг Kp разбит на *четыре*, на *пять* или на *шесть* частей, то хоть одна из соответствующих частей $f_1, f_2, \ldots$ окружности Okp будет иметь (дуговую) длину $\geqslant 90° \left(= \frac{360°}{4}\right)$, соответственно $\geqslant 72° \left(= \frac{360°}{5}\right)$ и $\geqslant 60° \left(= \frac{360°}{6}\right)$. Но в таком случае эта часть окружности Okp содержит точки, удаленные друг от друга на угловое расстояние $\geqslant 90°$, соответственно $\geqslant 72°$ и $\geqslant 60°$, т. е. точки, отстоя-

щие одна от другой на расстояние $\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, соответственно $\geqslant \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ и $\geqslant \frac{1}{2}$ (величины $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°$, $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sin 36°$ и $\frac{1}{2} = \sin 30°$ суть длины хорд окружности *Окр*, стягивающих дуги в 90°, в 72° и в 60°). Разбить круг *Кр* на четыре части

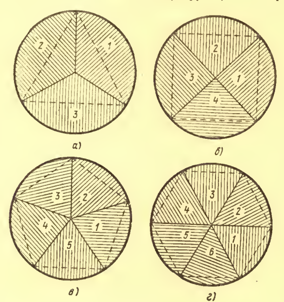


Рис. 183.

диаметра $\frac{\sqrt{2}}{2}$, на пять частей диаметра $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ и на шесть частей диаметра $\frac{1}{2}$, очевидно, можно (рис. 183, *б* — *г*); поэтому

$$\delta(4, Kp) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \delta(5, Kp) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \delta(6, Kp) = \frac{1}{2}.$$

5°. $n = 7$. Если круг *Кр* разбит на *семь* частей так, что все эти части содержат части окружности *Окр*, то та из частей, которой принадлежит центр *O* круга *Кр*, имеет диаметр $\geqslant \frac{1}{2}$. Если же круг разбит на семь частей так, что не больше шести из них содержат точки окружности *Окр*, то *Окр* разобьется на шесть (или меньше) частей, и, как выше, получим, что хоть одна из этих частей

окружности Kp имеет диаметр $\geqslant \frac{1}{2}$. Разбить круг Kp на семь частей так, что диаметр каждой из этих частей $\geqslant \frac{1}{2}$, очевидно, можно — ведь Kp можно разбить и на шесть частей с соблюдением последнего условия. Таким образом, имеем

$$\delta(7, Kp) = \frac{1}{2} \qquad (= \delta(6, Kp)).$$

б) Здесь требуется разбить на возможно меньшие части *квадрат* $K\mathit{в}$ диаметра 1, т. е. квадрат $ABCD$ со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и диагональю 1.

1°. $n = 1$. Ясно, что $\delta(1, K\mathit{в}) = 1$.

2°. $n = 2$. Если квадрат $K\mathit{в} \equiv ABCD$ разбит на *две* части F_1 и F_2 диаметра < 1, то его противоположные вершины принадлежат разным частям; пусть, например, вершины A и B принадлежат части F_1, а вершины C и D — части F_2. Если при этом середина E стороны BC принадлежит части F_1 квадрата, то, очевидно,

$$d_1 = d(F_1) \geqslant AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

Рис. 184.

где $d(F_1)$ — диаметр части F_1, а, если E принадлежит части F_2, то $d_2 = d(F_2) \geqslant \frac{\sqrt{10}}{4}$. Таким образом, во всех случаях хоть одно из чисел d_1 и d_2 будет $\geqslant \frac{\sqrt{10}}{4}$. Так как разбить $K\mathit{в}$ на две части диаметра $\frac{\sqrt{10}}{4}$ возможно (рис. 184), то

$$\delta(2, K\mathit{в}) = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

3°. $n = 3$. Если квадрат $K\mathit{в} \equiv ABCD$ разбит на *три* части F_1, F_2 и F_3, то какие-то две его вершины принадлежат одной части. Если эти две вершины квадрата *противоположные*, то диаметр соответствующей части равен 1, т. е. очень велик; поэтому мы можем считать, что одной части (скажем, F_1) принадлежат две *соседние* вершины A и B квадрата $K\mathit{в}$. Пусть K и L — точки сторон AD и BC квадрата $K\mathit{в}$, принадлежащие той же части F_1, что и вершины A и B, и наиболее удаленные от A, соответственно от B; обозначим еще $AK = x$ и $BL = y$ (рис. 185, *а*). В точке K сходятся две части разбиения квадрата $K\mathit{в}$, скажем, F_1 и F_2. Если при этом вершина C также принадлежит части F_2 квадрата, то

$$d_1 = d(F_1) \geqslant BK, \qquad d_2 = d(F_2) \geqslant CK,$$

откуда, аналогично случаю 2°, устанавливается, что хоть один из диаметров d_1 и d_2 частей F_1 и F_2 будет $\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$, что не дает никакой выгоды по сравнению с разбиением $K\!в$ на две части. Поэтому мы можем считать, что вершина C квадрата принадлежит той части F_3, которая сходится с F_1 в точке L и (по аналогичной причине) вершина D принадлежит части F_2 квадрата[1]).

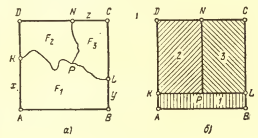


Рис. 185.

Обозначим теперь через N точку стороны CD, в которой сходятся части F_2 и F_3; пусть $CN=z$, $DN=\frac{\sqrt{2}}{2}-z$ (рис. 185, *а*). [Точка N стороны CD, в которой сходятся части F_2 и F_3, обязательно существует, ибо вершина D принадлежит F_2, а вершина C — F_3; с другой стороны, н и о д н а точка стороны CD не принадлежит части F_1 квадрата, ибо в противном случае мы имели бы $d_1=d(F_1)\geqslant AN$ и $d(F_1)\geqslant BN$, а хотя бы один из отрезков AN и $BN\geqslant\frac{\sqrt{10}}{4}$.] В таком случае мы имеем

$$d_1=d(F_1)\geqslant AL=\sqrt{\frac{1}{2}+y^2}\qquad\text{и}\qquad d_1\geqslant BK=\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}\,;$$

далее

$$d_2=d(F_2)\geqslant KN=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-z\right)^2}$$

и

$$d_3=d(F_3)\geqslant LN=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-y\right)^2+z^2}\,.$$

Нетрудно понять (и доказать, что мы и сделаем несколько ниже), что наиболее выгодным является такое разбиение $K\!в$ на части F_1, F_2 и F_3, когда

$$AL=BK=KN=LN,$$

[1]) Рассмотрите сами (менее выгодный) случай, когда и в точке K, и в точке L сходятся части F_1 и F_2 квадрата.

т. е. когда

$$\frac{1}{2}+y^2=\frac{1}{2}+x^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-z\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-y\right)^2+z^2.$$

Из этих равенств получаем прежде всего

$$x=y \quad \text{и} \quad z=\frac{\sqrt{2}}{2}-z, \quad \text{т. е.} \quad z=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

откуда далее следует, что

$$x\,(=y)=\frac{\sqrt{2}}{16} \quad \text{и} \quad AL=BK=KN=LN=\frac{\sqrt{130}}{16}.$$

Докажем теперь, что действительно

$$\delta(3,\ K\text{в})=\frac{\sqrt{130}}{16}.$$

Прежде всего, ясно, что квадрат *можно разбить на три части диаметр каждой из которых равен* $\frac{\sqrt{130}}{16}$; такое разбиение изображено на рис. 185, *б*, где $AK=BL=\frac{\sqrt{2}}{16}\left(=\frac{1}{8}AB\right)$, а $CN=DN=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(=\frac{1}{2}CD\right)$ и, очевидно, $d_1=AL=BK=\frac{\sqrt{130}}{16}$ и $d_2=d_3=KN=LN=CP=DP=\frac{\sqrt{130}}{16}$. Почти так же легко устанавливается, что *если квадрат Кв разбит на какие угодно три части* F_1, F_2 *и* F_3, *то диаметр хоть одной из них не меньше* $\frac{\sqrt{130}}{16}$. В самом деле, если на рис. 185, *а*

$$BK=\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}<\frac{\sqrt{130}}{16} \quad \text{и} \quad AL=\sqrt{\frac{1}{2}+y^2}<\frac{\sqrt{130}}{16},$$

то $x<\frac{\sqrt{2}}{16}$ и $y<\frac{\sqrt{2}}{16}$; но в таком случае $DK=\frac{\sqrt{2}}{2}-x>\frac{7\sqrt{2}}{16}$ и $CL=\frac{\sqrt{2}}{2}-y>\frac{7\sqrt{2}}{16}$, — и так как хоть один из отрезков $CN=z$ и $DN=\frac{\sqrt{2}}{2}-z$ не меньше $\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{4}$, то хоть один из отрезков LN и KN

$$>\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{7\sqrt{2}}{16}\right)^2}=\frac{\sqrt{130}}{16}.$$

Поэтому

$$\delta(3,\ K\text{в})=\frac{\sqrt{130}}{16}.$$

4°. $n = 4$. Пусть квадрат $Кв$ разбит на *четыре* частн F_1, F_2, F_3 и F_4. Если прн этом две вершниы $Кв$ прниадлежат о д н о й н т о й ж е части, то диаметр этой части $\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. велик $\left(\text{ведь величина } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{128}}{16} \text{ мало отличается от } \delta(3, Кв) = \frac{\sqrt{130}}{16}!\right)$; поэтому нам выгодиее считать, что все четыре вершниы прннадлежат четырем р а з н ы м частям. Но в этом случае днаметр той нз частей, которая содержит центр Q квадрата $Кв$, не меньше расстояния $\frac{1}{2}$ от Q до вершин квадрата. Разбить $Кв$ на четыре частн диаметра $\frac{1}{2}$, очевндно, можно (рнс. 186). Такнм образом,

$$\delta(4, Кв) = \frac{1}{2}.$$

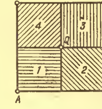


Рис. 186.

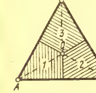
в) Эта задача связана с разбиением на возможно меньшие части р а в н о с т о р о н н е г о т р е у г о л ь н и к а $Тр$ со стороной 1.

1°. $n = 1$. Ясно, что $\delta(Тр, 1) = 1$.

2°. $n = 2$. Так как хоть одна нз двух частей F_1 н F_2, на которые разбивается треугольник $Тр \equiv ABC$, содержнт две вершины $Тр$, расстояние между которыми равно 1, то н

$$\delta(2, Тр) = 1.$$

3°. $n = 3$. Пусть Q — ц е н т р правильного треугольника $Тр \equiv \equiv ABC$; тогда расстояние между любымн двумя из точек A, B, C и Q будет $\geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ибо $\frac{\sqrt{3}}{3}$ — это радиус описанной вокруг $Тр$ окружности). Но прн разбиении $Тр$ на три части F_1, F_2 и F_3 хоть одна из них будет обязательно содержать д в е из наших четырех точек; поэтому днаметр соответствующей части будет $\geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. Это рассуждение доказывает, что $\delta(3, Тр) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$; нз рис. 187 следует, что разбить $Тр$ на трн части диаметра $\frac{\sqrt{3}}{3}$ можно, т. е. что



Рнс. 187.

$$\delta(3, Тр) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4°. $n = 4$ или 5. Пусть A_1, B_1 н C_1 — середины сторон (правильного) треугольника $Тр \equiv ABC$ (рис. 188, *а*); в таком случае расстояние между любымн двумя нз шести точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 будет $\geqslant \frac{1}{2}$. Но прн разбиении $Тр$ на *четыре* части или на *пять* частей обязательно найдется часть, содержащая две нз этих шести

точек; диаметр этой части будет $\geqslant \frac{1}{2}$. Из этого рассуждения следует, что $\delta(4, Tp) \geqslant \frac{1}{2}$ и $\delta(5, Tp) \geqslant \frac{1}{2}$; с другой стороны,

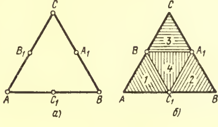


Рис. 188.

изображенное на рис. 188, б разбиение Tp на четыре части доказывает равенство

$$\delta(4, Tp) = \frac{1}{2}.$$

Ясно, что тем более и

$$\delta(5, Tp) = \frac{1}{2}.$$

Примечание. Аналогично случаю 4°, используя изображенные на рис. 189, а десять точек, расстояние между каждыми двумя

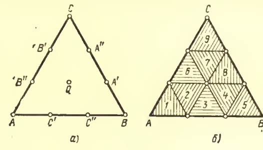


Рис. 189.

из которых $\geqslant \frac{1}{3}$, можно установить, что $\delta(9, Tp) \geqslant \frac{1}{3}$; рис. 189, б доказывает, что $\delta(9, Tp) = \frac{1}{3}$.

104. а) Любую плоскую фигуру F диаметра 1 можно заключить в *правильный шестиугольник* $Ш \equiv ABCDEG$ со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$

и диаметром вписанного круга 1 (рис. 190, *а*; см. выше задачу 93 в)). Но легко видеть, что каждый из изображенных на рис. 190 пятиугольников $OMBCN$, $ONDEP$ и $OPGAM$ имеет диаметр $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (диаметры этих пятиугольников равны длинам отрезков MN, NP и PM — сторонам правильного треугольника, вписанного во вписанный круг шестиугольника $Ш$). Разбиение шестиугольника $Ш$ на

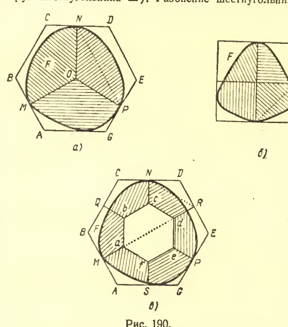


Рис. 190.

эти три пятиугольника порождает разбиение фигуры F на три части, диаметр каждой из которых $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Каждую плоскую фигуру диаметра 1 можно заключить внутрь *квадрата Кв* со стороной 1 (рис. 190, *б*; см. выше задачу 93 а)). Разбив $Кв$ средними линиями на четыре меньших квадрата диаметра $\frac{\sqrt{2}}{2}$, мы тем самым разобьем и F на четыре части диаметров $\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) Обратимся снова к фигурирующему в решении задачи а) *правильному шестиугольнику* $Ш \equiv ABCDEG$ со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$, описанному вокруг фигуры F диаметра 1. Нетрудно видеть, что изображенные на рис. 190, *в* шестиугольник $abcdef$ и шесть

пятиугольников $AMafS$, $BQbaM$, $CNcbQ$, $DRdcN$, $EPedR$ и $GSfeP$ имеют диаметр $\frac{1}{2}$, откуда , как и выше, следует возможность разбиения F на семь частей диаметра $\leqslant \frac{1}{2}$.

105. а) Так как единичный круг, касающийся K, очевидно, виден из центра O круга K под углом 60°, то к K нельзя приложить больше шести $\left(=\frac{360°}{60°}\right)$ непересекающихся единичных кругов. Шесть кругов, очевидно, приложить можно (рис. 191, a).

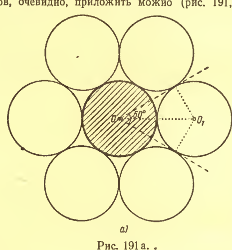


Рис. 191 а. .

б) Если O_1 и O_2 — центры двух приложенных к K единичных кругов K_1 и K_2 таких, что O_1 не лежит внутри K_2, а O_2 не лежит внутри K_1, то $O_1O_2 \geqslant 1$, $OO_1 = OO_2 = 2$ и $\angle O_1OO_2 \geqslant 2 \arcsin \frac{1}{4} \approx$ $\approx 29{,}0°$. Отсюда вытекает, что к S можно приложить не больше 12 $\left(12 \text{ есть целая часть дроби } \frac{360°}{29°}\right)$ единичных кругов так, что ни один из них не будет содержать внутри себя центр другого круга; 12 кругов, очевидно, приложить можно (рис. 191, $б$).

в) На рис. 191, $в$ показано, что 18 кругов, удовлетворяющих условию задачи, разместить можно (шесть кругов рис. 191, $в$ имеют центры в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в K, остальные 12 — в вершинах квадратов, построенных на сторонах вписанного шестиугольника вне его; ср. с рис. 208 ниже). То, что больше 18 кругов разместить нельзя, следует из результата задачи 118: при таком расположении центры всех кругов (включая центр O круга K) образовывали бы систему из 20 или больше точек, заключенных внутри круга радиуса 2 с центром в одной из этих точек O и таких, что расстояние между каждыми двумя из этих точек не меньше 1, в то время как в силу задачи 118 б) такой системы точек не может существовать.

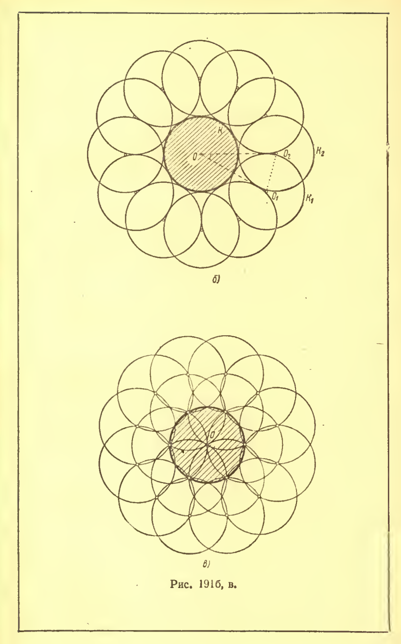


Рис. 191б, в.

106. П е р в о е   р е ш е н и е. Пусть O — центр основного квадрата K, O_1 и O_2 — центры приложенных к нему непересекающихся квадратов K_1 и K_2 (рис. 192, *а*). Так как н а и м е н ь ш е е расстояние от центра единичного квадрата до его границы равно $\frac{1}{2}$, то отрезки O_1O, OO_2, O_1O_2 не меньше 1. Далее, так как квадраты K и K_1 соприкасаются в некоторой точке A, то $OO_1 \leqslant OA + O_1A \leqslant \sqrt{2}$ (ибо наибольшее расстояние от центра единичного квадрата до его границы равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Следовательно, точки O_1 и O_2 лежат внутри кольца с центром O, ограниченного окружностями

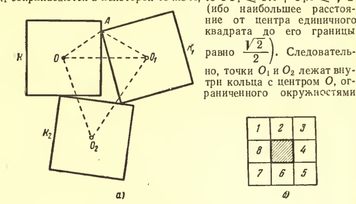


Рис. 192.

радиусов 1 и $\sqrt{2}$; а так как $O_1O_2 \geqslant 1$, то угол O_1OO_2 в силу результата задачи 20 не меньше $2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 41{,}4°$. Отсюда следует, что к квадрату K нельзя приложить больше восьми непересекающихся единичных квадратов, так как $9 \cdot 41{,}4° > 360°$; *восемь* квадратов к квадрату K приложить, очевидно, можно (рис. 192, *б*).

П р и м е ч а н и е. Эту задачу можно также решить, не пользуясь тригонометрическими таблицами. $2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$ есть угол при вершине равнобедренного треугольника с боковыми сторонами $\sqrt{2}$ и основанием 1. Приложим друг к другу девять таких треугольников так, как это указано на рис. 193. Сумма длин оснований всех этих треугольников будет превосходить длину окружности радиуса $\sqrt{2}$: действительно, $2\pi\sqrt{2} < 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}42 < 8{,}93 < 9$.

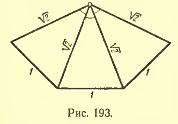


Рис. 193.

Отсюда вытекает, что $9 \cdot 2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} > 360°$, а это нам и требовалось показать.

Второе решение. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат K; длину его стороны мы примем за единицу. Рассмотрим квадрат $A'B'C'D'$ со стороной 2, имеющий общий центр с квадратом K и те же направления сторон (рис. 194); периметр квадрата $A'B'C'D'$, очевидно, равен 8. Покажем, что длина l части периметра квадрата $A'B'C'D'$, высекаемой стороной одного из прикладываемых квадратов, не может быть меньше 1; отсюда будет следовать, что к K

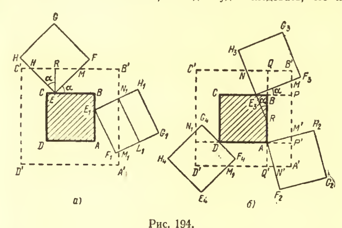


Рис. 194.

нельзя приложить больше восьми не налегающих друг на друга квадратов. Рассмотрим все возможные положения приложенного квадрата.

1°. Пусть *ни одна из вершин квадрата $A'B'C'D'$ не попадает внутрь приложенного квадрата* (случаи квадратов $EFGH$ и $E_1F_1G_1H_1$ на рис. 194, *а*). Если при этом лишь одна вершина приложенного квадрата попадает внутрь квадрата $A'B'C'D'$ (как в случае квадрата $EFGH$), то, обозначив угол между сторонами BC и EF через α, будем иметь

$$l = MN = MR + RN = ER\,\mathrm{tg}\,\alpha + ER\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}}\right)^2 \geqslant 1.$$

Если же две вершины приложенного квадрата попадут внутрь квадрата $A'B'C'D'$ (как в случае квадрата $E_1F_1G_1H_1$), то очевидно, $l = M_1N_1 \geqslant N_1L_1 = 1$.

2°. Пусть *одна из вершин квадрата $A'B'C'D'$ попадет внутрь приложенного квадрата* (квадраты $AF_2G_2H_2$, $E_3F_3G_3H_3$ и $E_4F_4G_4H_4$ на рис. 194, *б*). Если приложенный квадрат своей вершиной примыкает к квадрату $ABCD$ в отличной от вершины точке границы (случай квадрата $E_3F_3G_3H_3$), то

$$l = MB' + B'N = (PB' + B'Q) + (QN - PM) = 1 + (QN - PM).$$

Но (рис. 194, *б*)

$$PM = E_3P \operatorname{tg} \alpha, \quad QN = RQ \operatorname{tg} \alpha, \quad RQ - E_3P = RB - E_3B \geqslant 0,$$

так как $\alpha \leqslant 45°$. Следовательно, $QN > PM$ и $l > 1$. Эти же рассуждения применимы в том случае, когда приложенный квадрат примыкает вершиной к вершине квадрата $ABCD$ (случай квадрата $AF_2G_2H_2$); в этом случае только $P'M' = Q'N'$ и, следовательно, $l = M'A' + A'N' = 1$. Наконец, если приложенный квадрат примыкает к вершине квадрата $ABCD$ стороной (случай квадрата $E_4F_4G_4H_4$), то

$$l = M_1D' + D'N_1 > M_1N_1 \geqslant G_4F_4 = 1.$$

Таким образом, во всех случаях длина части MN периметра $A'B'C'D'$ действительно не может быть меньше 1.

107. а) Ясно, что стороны AB треугольника $T \equiv ABC$ во внутренней точке этой стороны может касаться лишь *один* не пересекающий T, равный ему и параллельно ему расположенный треугольник, ибо два таких треугольника T_1 и T_2 обязательно пересекутся (сделайте чертеж!). При этом, если есть такой треугольник T_1, который соприкасается со стороной AB треугольника T, то к вершине A (и к вершине B) может примыкать не более чем *один* не пересекающий ни T, ни T_1 треугольник T_2 (равный T и параллельно T расположенный); если же такого треугольника T_1 нет, то к вершине, скажем A, могут примыкать *два* равных T и параллельно ему расположенных треугольника T' и T'', не пересекающих ни T, ни друг друга. Так как это рассуждение справедливо для к а ж д о й стороны треугольника T, то из него вытекает, что интересующее нас число приложенных к T треугольников $\leqslant 6$. То, что это число может быть равно 6, показывают рис. 195, *а*, *б*.

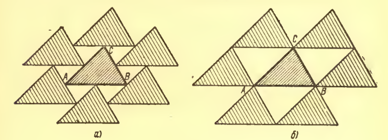


Рис. 195.

б) П е р в о е   р е ш е н и е. Ясно, что к стороне AB квадрата $K \equiv ABCD$ можно приложить *один*, *два* или *три* равных K и параллельно K расположенных квадрата, не пересекающих K и не пересекающихся между собой (сделайте чертеж!). При этом, если к стороне AB приложены *два* квадрата так, что третьего уже приложить нельзя, или *три* квадрата, то после этого к сторонам BC и AD квадрата K можно дополнительно приложить еще только по *два* новых квадрата, а затем к стороне CD — только *один* квадрат. Это рассуждение (которое мы предоставляем читателю несколько

дополнить), показывает, что искомое число приложенных к K и параллельно K расположенных непересекающихся квадратов $\leqslant 8$; то, что оно может быть равно 8, следует из рис. 192, *б*.

Второе решение. Искомое число $\leqslant 8$ в силу результата задачи 106; рис. 192, *б* показывает, что оно может равняться 8.

108. а) Так как круг K нельзя разбить на две части меньшего 1 диаметра (см. выше задачу 103 а)), то его и нельзя покрыть двумя кругами K_1 и K_2 диаметров < 1, иначе диаметр покрытой K_1 части K и диаметр «остатка» (целиком покрытого кругом K_2) были бы оба меньше 1.

б) — в) Результаты этих задач следуют из того, что $\delta(3, Kp) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, соответственно $\delta(4, Kp) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. ту же задачу 103 а)).

То, что оценки задач б), в) улучшить нельзя, показывают рис. 51, *а*, *б* (стр. 111); для задачи а) это очевидно (ибо K можно покрыть даже одним кругом диаметра 1).

109. Так как диаметр меньших кругов равен радиусу R «большого» круга K, то каждый из меньших кругов пересекает окружность большого круга в точках, отстоящих друг от друга не больше чем на R, и, следовательно, покрывает дугу этой окружности, не большую чем 60°. Отсюда следует, что для того, чтобы покрыть всю окружность круга K, требуется не меньше *шести* меньших кругов; при этом шести кругов оказывается достаточно только в том случае, когда эти круги имеют диаметрами шесть сторон правильного шестиугольника, вписанного в большую окружность, а во всех остальных случаях требуется не меньше семи кругов. Но если окружность большого круга покрыта шестью кругами, то требуется еще не меньше одного маленького круга, чтобы покрыть оставшуюся часть большого круга (ибо первые шесть кругов не покрывают, например, центр большого круга). При этом одного круга оказывается достаточно для того, чтобы покрыть оставшуюся часть большого круга (см. рис. 196; из того, что $O_1M = \frac{1}{2}R$, следует, что O_1M есть медиана прямоугольного треугольника OO_1A с углом в 30° и, следовательно, $OM = \frac{1}{2}R$). Таким образом, *наименьшее число кругов радиуса* $\frac{1}{2}R$, *которыми можно покрыть круг радиуса* R, *равно* 7 (ср. с равенством $\delta(7, Kp) = \frac{1}{2}$; задача 103 а)).

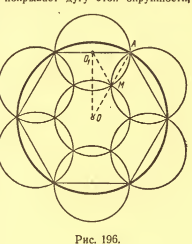


Рис. 196.

110. а) Ясно, что диаметр объединения двух непересекающихся кругов не меньше суммы их радиусов (ср. выше задачу 6 б)), откуда и следует, что два круга K_1 и K_2 радиусов $> \frac{1}{2}$ нельзя поместить в круг, радиус которого равен 1, т. е. меньше суммы радиусов K_1 и K_2.

б) Предположим, что мы имеем три непересекающиеся круга K_1, K_2 и K_3 радиусов $> 2\sqrt{3} - 3$; в таком случае периметр $\triangle O_1O_2O_3$, образованного их центрами, $> 12\sqrt{3} - 18$ (ибо каждая сторона этого треугольника $> 4\sqrt{3} - 6$). Но в таком случае радиус R описанного вокруг $\triangle O_1O_2O_3$ круга $\geqslant \frac{12\sqrt{3} - 18}{3\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}$ (ибо радиус круга, описанного вокруг равностороннего треугольника периметра P, равен $\frac{P}{3\sqrt{3}}$, а из всех треугольников данного периметра P наименьший радиус описанного круга имеет *правильный* треугольник — ср. выше задачу 71 б)). Поэтому, если $\triangle O_1O_2O_3$ *остроугольный*, то внутри него заведомо не найдется точки, которая была бы удалена и от O_1, и от O_2, и от O_3 на расстояние $< 4 - 2\sqrt{3}$, т. е. такой точки O, что круг с центром O радиуса $1 = (4 - 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 3)$ мог бы покрыть и K_1, и K_2, и K_3.

Если $\triangle O_1O_2O_3$ *тупоугольный*, то утверждение задачи будет еще более очевидным, ибо в этом случае наибольшая сторона $\triangle O_1O_2O_3$, скажем, сторона O_1O_2 — наверняка будет не меньше

$$\sqrt{O_1O_3^2 + O_2O_3^2} > \sqrt{2(4\sqrt{3} - 6)^2} = 2\sqrt{2}(2\sqrt{3} - 3),$$

откуда следует, что объединение кругов K_1 и K_2 уже имеет диаметр $> (2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{2} + 2) > 1$ (см. задачу 6 б)) и не может поместиться в круг K.

То, что оценки задач а), б) улучшить *нельзя*, показывают рис. 51, *а*, *б*.

111. Прежде всего заметим, что если выпуклый многоугольник M не треугольник и не параллелограмм, то у него найдутся *две несмежные и не параллельные стороны*. В самом деле, если M имеет $\geqslant 5$ сторон, то, поскольку к стороне AB примыкают *две* другие стороны и параллельной ей может быть лишь *одна* сторона многоугольника (ибо выпуклый многоугольник не может иметь три параллельные стороны — почему?), то для *каждой* стороны AB найдется не смежная с ней и не параллельная ей. Если же M — четырехугольник, то пары несмежных и непараллельных сторон нет лишь у параллелограмма в силу самого определения параллелограмма. Продолжим теперь эти две выбранные стороны до их пересечения; мы получим новый многоугольник M_1 с меньшим, чем у M, числом сторон, все стороны которого (понимаемые здесь как прямые линии) являются одновременно и сторонами M (рис. 197),

Рис. 197.

Проделывая затем то же самое и с многоугольником M_1, с многоугольником M_2, получаемым таким же образом из M_1, и т. д., мы будем получать все новые многоугольники, число сторон которых все время будет убывать; закончиться эта процедура может лишь на *треугольнике* или на *параллелограмме*.

Если окончательно мы получили содержащий M *треугольник*, то наше утверждение доказано. Пусть теперь мы пришли к *параллелограмму* $ABCD$, все стороны которого содержат стороны M. Так как этот параллелограмм, по условию, не совпадает с M, то какая-то вершина $ABCD$ — скажем, вершина A — не принадлежит M. Пусть K — ближайшая к A точка стороны AB, принадлежащая M, и KL — выходящая из K сторона M, не совпадающая с прямой AB. Так как многоугольник M выпуклый, одна его сторона принадлежит стороне AD параллелограмма и одна его сторона PK принадлежит прямой AB, то сторона KL может идти только так, как это изображено на рис. 198. Но в этом случае прямые BC, CD и KL, содержащие стороны многоугольника M, образуют требуемый условием задачи треугольник.

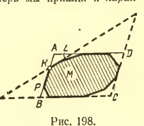


Рис. 198.

112. Прежде всего, ясно, что любой параллелограмм, подобный данному параллелограмму $\Pi \equiv ABCD$, меньший его и параллельно Π расположенный, имеет те же направления сторон; ясно, что он никак не может покрыть одновременно две вершины исходного параллелограмма Π. Отсюда следует, что покрыть Π *тремя* подобными ему, меньшими его и параллельно ему расположенными параллелограммами нельзя — минимальное число необходимых для этого параллелограммов $\geqslant 4$ (по числу вершин Π). Покрыть Π *четырьмя* параллелограммами с соблюдением условий задачи, очевидно, можно — достаточно рассмотреть четыре параллелограмма π_1, π_2, π_3 и π_4, получаемые из Π равномерными сжатиями (гомотетиями) к четырем вершинам Π с коэффициентами сжатия k, где $1 > k > \frac{1}{2}$ (сделайте чертеж!).

Пусть теперь M — *отличный от параллелограмма* выпуклый многоугольник; тогда, согласно результату задачи 111, его можно заключить в треугольник PQR, полученный продолжением трех сторон, скажем A_nA_1, A_kA_{k+1} и A_lA_{l+1}, многоугольника M (рис. 199). Разрежем M на три части m_1, m_2 и m_3 отрезками OB, OC и OD, где O — внутренняя точка M, а B, C и D — точки его сторон A_nA_1, A_kA_{k+1} и A_lA_{l+1}. Сожмем теперь равномерно многоугольник M к вершине P треугольника PQR. Если коэффициент сжатия достаточно близок к единице, то многоугольник M_1, получаемый из M равномерным сжатием к вершине P треугольника PQR, обязательно покроет примыкающую к P часть m_1 многоугольника M; для того чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить границы многоугольников M_1 и m_1 (проведите сами аккуратно это рассуждение!). Аналогично этому показывается, что многоугольники M_2 и M_3, получаемые из M равномерными сжатиями к вершинам Q и R треугольника PQR с меньшими 1 (но достаточно близкими к 1!) коэффициентами, полностью покроют части m_2 и m_3 многоугольника M.

А так как объединение частей m_1, m_2 и m_3 дает полный многоугольник M, то этим и доказывается утверждение задачи.

Для того чтобы доказать невозможность покрытия («невырожденного», т. е. не обращающегося в отрезок) выпуклого многоугольника M *двумя* гомотетичными M и меньшими M многоугольниками m_1 и m_2, достаточно заметить, что если m_1 и m_2 р а в н ы, то они получаются один из другого *параллельным переносом* в некотором направлении l (см., например, § 1 гл. 1 второй части книги: И. М. Я г л о м, Геометрические преобразования I, М., Гостехиздат,

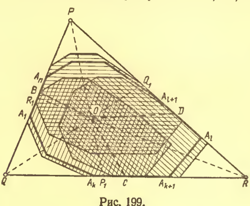


Рис. 199.

1955). Но в таком случае ширина *объединения* m_1 *и* m_2 в перпендикулярном l направлении, т. е. ширина самой узкой содержащей m_1 и m_2 полосы, ограниченной двумя параллельными l прямыми l_1 и l_2, будет такой же, как ширина к а ж д о г о из этих многоугольников, и значит, *меньше*, чем ширина в том же направлении многоугольника M (сделайте чертеж!). Отсюда уже следует, что целиком покрыть M многоугольники m_1 и m_2 не могут. Если же m_1 и m_2 н е р а в н ы, то достаточно заменить меньший из них (скажем, m_2) гомотетичным m_2 с центром во *внутренней* точке m_2 многоугольником m_2', равным m_1, чтобы прийти к рассмотренному ранее случаю (ибо если m_1 и m_2' не могут целиком покрыть M, то тем более покрыть M не могут многоугольники m_1 и m_2).

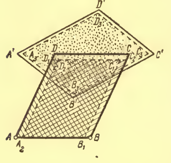


Рис. 200.

113. Мы уже знаем (см. задачу 112), что каждый *отличный от параллелограмма* (выпуклый) многоугольник M может быть покрыт т р е м я многоугольниками, подобными M и меньшими M; таким образом, осталось лишь показать, что это верно и для *параллелограмма* $\Pi \equiv ABCD$. Но параллелограммы $n_1 \equiv AB_1C_1D_1$ и $n_2 \equiv A_2BC_2D_2$, полученные из Π равномерными сжатиями к верши-

нам A и B с близкими к 1 (но, разумеется, меньшими 1) коэффициентами сжатия, «почти покрывают» Π: непокрытой останется лишь узкая полоска CDD_1C_2, примыкающая к стороне CD (рис. 200). С другой стороны, если B тупой (или прямой) угол Π, то $AC > CD$, и, слегка уменьшив Π подобно, мы получим параллелограмм $n_3 \equiv A_3B_3C_3D_3$, диагональ A_3C_3 которого все еще $> CD$, и потому, наложив n_3 на полоску CDD_1C_2 так, чтобы A_3C_3 совпала по направлению со средней линией этой полоски, мы полностью покроем Π т р е м я параллелограммами n_1, n_2 и n_3.

114. Пусть k есть наименьшее целое число такое, что $k \geqslant 2R$[1]). Приложим k полос краями друг к другу и положим на образовавшуюся широкую полосу данный круг так, чтобы он касался одной ее границы. Тогда круг будет лежать целиком внутри получившейся полосы (рис. 201, *а*). Мы утверждаем, что *меньшим, чем k, числом полос ширины* 1 *наш круг покрыть нельзя.*

Для доказательства построим полусферу, «экватором» которой



Рис. 201.

служит данный круг (рис. 201, *б*). Рассмотрим теперь произвольное покрытие круга полосами. Через границы полос проведем плоскости, перпендикулярные к плоскости круга до пересечения с полусферой. Каждой полоске покрытия будет соответствовать на полусфере полупояс высоты 1 или полусегмент высоты $\leqslant 1$; соответствующие всем полосам полупояса и полусегменты целиком покрывают полусферу. Обратно, пусть дано некоторое покрытие полусферы полупоясами высоты 1 и полусегментами высоты $\leqslant 1$, ограниченными окружностями, плоскости которых перпендикулярны плоскости ограничивающего полусферу «большого круга». Спроектировав ортогонально эти полупояса и полусегменты на плоскость данного круга, получим покрытие круга полосками ширины 1 (мы считаем, что сегменты высоты меньше 1 отвечают полосам ширины 1, лишь один край которых пересекает круг). Поэтому мы можем переформулировать задачу так: *каким наименьшим числом полупоясов высоты* 1 *и полусегментов высоты* $\leqslant 1$ *можно покрыть полусферу.* Но очевидно, что сумма поверхностей всех этих полупоясов и полусегментов не может быть меньше поверхности полусферы. Так как

[1]) Другими словами $k = [2R] + 1$, если $2R$ не есть целое число; в противном же случае $k = 2R = [2R]$ (здесь прямыми скобками обозначена ц е л а я ч а с т ь числа, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее данного; ср. стр. 80).

поверхность полупояса или полусегмента высоты 1 равна πR (напоминаем, что поверхность сферического пояса зависит только от высоты, но не от расположения пояса на сфере!), а поверхность полусферы равна $2\pi R^2$, то очевидно, что если число k полупоясов и полусегментов таково, что

$$k\pi R < 2\pi R^2, \quad \text{или} \quad k < 2R,$$

то этими k полупоясами и полусегментами полусферу покрыть нельзя, — что и требовалось доказать.

115. а) Диаметр треугольника T равен его наибольшей стороне (задача 78 а)); если $\triangle ABC \equiv T$ *тупоугольный* или *прямоугольный*, то круг, построенный на наибольшей стороне AB как на диаметре, полностью покроет T (рис. 202, *а*), и в этом случае интересующее

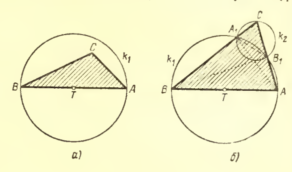


Рис. 202.

нас число равно 1. Если же $\triangle ABC$ *остроугольный*, то единственный круг диаметра 1, который покрывает сторону $AB = 1$ этого треугольника, имеет отрезок AB своим диаметром; но этот круг k_1 полностью $\triangle ABC$ не покрывает (рис. 202, *б*), так что здесь интересующее нас число $\geqslant 2$.

Обозначим теперь точки пересечения окружности круга k_1 со сторонами AC и BC треугольника через B_1 и A_1. Из прямоугольных треугольников AA_1C и BB_1C с острым углом C следует, что

$$CA_1 = CA \cos C = b \cos C \quad \text{и} \quad CB_1 = CB \cos C = a \cos C,$$

где $AC = b$, $BC = a$. Поэтому треугольники CAB и CB_1A_1 с общим углом и пропорциональными сторонами *подобны*, причем коэффициент подобия этих треугольников равен $\cos C$. Отсюда следует, что диаметр d описанного вокруг $\triangle A_1B_1C$ круга k_2 равен $D \cos C$, где D — диаметр круга, описанного вокруг $\triangle ABC$. Но в силу теоремы синусов

$$D = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{\sin C},$$

и следовательно,

$$d = D \cos C = \frac{\cos C}{\sin C} = \operatorname{ctg} C.$$

А так как $\angle C \geqslant 60^\circ$ (ибо наибольшей стороне AB треугольника ABC противолежит его наибольший угол C), то

$$d = \operatorname{ctg} C \leqslant \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$$

Таким образом, в этом случае $\triangle ABC$ можно покрыть кругами k_1 и k_2 диаметров $\leqslant 1$, и требуемое число равно 2.

б) Мы знаем, что наименьшее число кругов диаметра 1, которыми можно покрыть $\triangle ABC$ диаметра 1, равно 1 (если $\triangle ABC$ тупоугольный или прямоугольный) или 2 (если $\triangle ABC$ остроугольный); на рис. 203 изображен шестиугольник $ш \equiv AB_1CA_1BC_1$ диаметра 1 (здесь $AB = BC = CA = AA_1 = BB_1 = CC_1 = 1$; углы $ш$

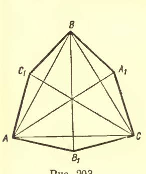



Рис. 203.

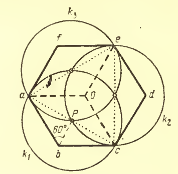


Рис. 204.

попеременно равны 120° и 150°), который нельзя покрыть меньше чем тремя кругами диаметра 1 (почему?). Докажем теперь, что *каждый выпуклый многоугольник M диаметра 1 можно покрыть тремя кругами диаметра 1.*

Воспользуемся для этого результатом задачи 93 в), в силу которого каждый многоугольник M диаметра 1 можно заключить в правильный шестиугольник $Ш \equiv abcdef$ со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (рис. 204). Разобьем теперь $Ш$ на три ромба с углами 60° и 120° $abcO$, $cdeO$ и $efaO$, где O — центр $Ш$. Диаметр каждого такого ромба равен его наибольшей диагонали; но если P — основание перпендикуляра, опущенного из b на ac, то

$$ac = 2aP = 2ab \sin 60^\circ = 2\,\frac{\sqrt{3}}{3} \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Опишем теперь на отрезках ac, ce и ea длины 1 как на диаметрах круги k_1, k_2 и k_3; эти круги покроют наши три ромба, а значит, покроют полностью шестиугольник $Ш$, а значит, покроют и многоугольник M.

Итак, интересующее нас число может равняться 1, 2 или 3.

Примечание. Ясно, что результат задачи б) сохраняет силу и для произвольных (даже не обязательно выпуклых) плоских

фигур диаметра 1 (для которых ведь тоже справедлива теорема задачи 93 в)).

116. Рассмотрим $n = n(1, M)$ непересекающихся кругов k_1, k_2, ..., k_n радиуса 1, расположенных внутри многоугольника M; нетрудно видеть, что центры всех этих кругов будут принадлежать многоугольнику m (почему?). Заменим теперь эти n кругов концентрическими с ними кругами K_1, K_2, ..., K_n радиуса 2. Мы утверждаем, что новые n кругов *полностью покроют* m. В самом деле, если бы существовала точка $A \in m$, не покрытая ни одним из n «больших» кругов K_1, K_2, ..., K_n, то центры всех этих кругов были бы удалены от A на расстояние $\geqslant 2$ и к числу заполняющих M кругов k_1, k_2, ..., k_n можно было бы прибавить круг k_{n+1} радиуса 1 с центром A, очевидно, не выходящим за пределы M и не пересекающийся ни с одним из предшествующих n кругов, что, однако, противоречит определению числа $n(1, M)$. Таким образом, многоугольник m можно покрыть n кругами радиуса 2, откуда в силу определения числа $\nu(2, n)$ и следует, что

$$n \geqslant \nu(2, m).$$

117. Пусть наибольшее расстояние от точки площади до ближайшего киоска равно r. В таком случае каждая точка площади будет находиться на расстоянии, не большем r, хотя бы от одного киоска, т. е. n кругов с центрами в точках расположения киосков полностью покроют площадь. Обратно, если площадь удается покрыть n кругами радиуса r, то, поместив киоски с мороженым в центрах этих кругов, мы можем быть уверены, что расстояние от каждой точки площади до ближайшего киоска не превосходит r. Поэтому наша задача равносильна следующей: *покрыть* (круглую или квадратную) *площадь n кругами возможно меньшего радиуса r* (ср. задачи 108, 109). В дальнейшем мы примем радиус круглой площади или сторону составляющего площадь квадрата за 1.

а) 1°. $n = 1, 2$. Так как *круг радиуса* 1 *нельзя покрыть двумя кругами меньшего радиуса* (задача 108 а)), то радиус хоть одного из наших двух кругов обязательно будет $\geqslant 1$, т. е. два киоска не дают никакой выгоды по сравнению с одним киоском, расположенным в центре площади.

2°. $n = 3$. Разделим площадь тремя радиусами на три равных сектора OAB, OBC и OCA с центральными углами в 120°. Наименьшим кругом, покрывающим треугольник OBA, является круг с центром в середине M хорды AB; ясно, что он является также наименьшим кругом, покрывающим сектор OAB. Построим три таких круга K_1, K_2 и K_3, покрывающих секторы OAB, OBC и OCA; эти три круга радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$ покрывают, очевидно, весь круг радиуса 1.

Так как круг K радиуса 1 *нельзя покрыть тремя кругами меньшего, чем* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *радиуса* (см. задачу 108 б)), то *наиболее выгодным расположением киосков является такое, при котором они находятся в серединах сторон правильного треугольника, вписанного в контур площади* (другими словами, киоски *находятся на трех*

радиусах площади, образующих друг с другом углы в 120°, *на расстоянии* $\frac{1}{2}$ *от центра площади*; см. рис. 205, *а*).

3°. $n = 4$. В точности, как и выше (см. случай $n = 3$; ср. с задачей 108 в)), показывается, что круг K радиуса 1 нельзя покрыть четырьмя кругами радиуса, меньшего $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *наиболее выгодным*

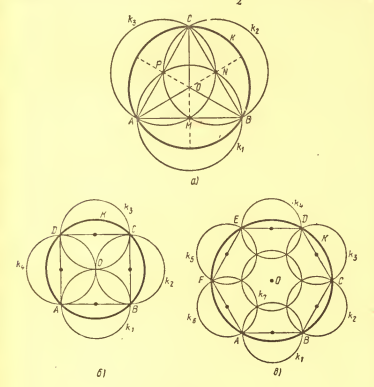


Рис. 205.

расположением четырех киосков на круглой площади является такое, при котором они совпадают с серединами сторон вписанного в площадь квадрата (рис. 205, *б*).

4°. $n = 7$. В решении задачи 109 было показано, что наименьшее число кругов радиуса 1/2 которыми можно покрыть круг радиуса 1, равно 7. Из рассуждений, использованных при решении этой задачи, следует также, что семью кругами, радиус каждого из которых м е н ь ш е 1/2, круг радиуса 1 покрыть н е л ь з я. Таким образом, решение настоящей задачи подсказывается рис. 196 (стр. 337): *наиболее выгодным расположением семи киосков на круглой площади является такое, при котором один киоск*

располагается в центре площади, а остальные шесть — в серединах сторон вписанного в площадь правильного шестиугольника (рис. 205, *в*).

б) 1°. $n = 1, 2$. Легко понять, что если $n = 2$, то положение, при котором один круг содержит две противоположные вершины квадратной площади, невыгодно; поэтому естественно считать, что один круг содержит вершины A и B квадрата, а второй — вершины C и D. Если теперь E и F — точки сторон BC и AD, то наибольший из диаметров двух кругов не меньше наибольшего из отрезков AE, DE, BF и CF. Отсюда, в точности как при решении задачи 103 б), мы заключаем, что при наиболее экономном покрытии квадрата $ABCD$ *двумя* кругами эти круги оказываются описанными вокруг прямоугольников $ABEF$ и $CDFE$, где EF — средняя линия квадрата $ABCD$; поэтому *наиболее выгодным расположением двух киосков на квадратной площади является такое, при котором эти киоски располагаются на средней линии MN площади на равных расстояниях* $^1/_4$ *от ее центра* O (рис. 206, *а*). [Ясно, что *один* киоск целесообразно расположить в центре площади.]

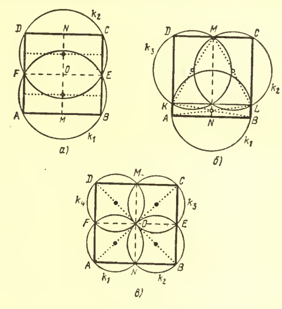


Рис. 206.

2°. $n = 3$. Здесь опять невыгодным является положение, при котором две противоположные вершины квадрата покрываются одним кругом; поэтому можно считать, что вершины A и B покрывает круг k_1, вершину C — круг k_2 и вершину D — круг k_3. Пусть теперь L — точка стороны BC, принадлежащая кругам k_1 и k_2; K — точка стороны AD, принадлежащая кругам k_1 и k_3; M — точка стороны CD, принадлежащая кругам k_2 и k_3. В таком случае наи-

больший из радиусов трех кругов будет не меньше наибольшего из отрезков AL, BK, ML и MK. Отсюда видно, что наша задача сводится к задаче о разбиении квадрата $ABCD$ на три части возможно меньшего диаметра (см. решение задачи 103 б) и, в частности, рис. 185, *б* на стр. 327); наиболее выгодным случаем является тот, когда $AL = BK = ML = MK$, и киоски расположены в серединах этих отрезков, т. е. *один из киосков расположен на средней линии* MN *квадрата* $ABCD$ *на расстоянии* $\frac{1}{16}$ *от стороны* AB, *а два других — в серединах отрезков* LM *и* KM, *соединяющих середину* M *стороны* CD *с такими точками* K *и* L *сторон* AD *и* BC, *что* $DK = CL = \frac{7}{8}$ (рис. 206, *б*).

3°. $n = 4$. В точности как при разборе случая $n = 4$ решения задачи 103 б), устанавливается, что *при наиболее выгодном расположении четырех киосков на квадратной площади эти киоски совпадают с центрами четырех меньших квадратов, на которые делится площадь своими средними линиями* (рис. 206, *в*).

118. а) Обозначим через R_n радиус наименьшего круга, в который можно заключить n точек, одна из которых совпадает с центром круга и расстояния между каждыми двумя из которых не меньше 1. Наша задача состоит в том, чтобы определить значения R_n при нескольких первых значениях n.

1°. Совершенно очевидно, что

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1$$

(внутри круга радиуса 1 можно поместить семь точек, расстояния между каждыми двумя из которых не меньше 1: достаточно принять за эти точки центр круга и шесть вершин правильного вписанного шестиугольника; рис. 207, *а*).

2°. Пусть внутри круга радиуса R расположено n точек, так что одна из точек совпадает с центром круга и расстояния между каждыми двумя из точек не меньше 1. В таком случае $n - 1$ из этих точек расположены внутри кольца с центром в n-й точке A_0, образованного окружностями радиусов 1 и R. При этом расстояние между каждыми двумя из этих $n - 1$ точек не меньше 1 и хотя бы один из углов, под которым видны из центра кольца отрезки, соединяющие эти точки, не превосходит $\frac{360°}{n-1}$. Это замечание указывает на связь настоящей задачи с задачей 20.

Если $n = 8$, $n - 1 = 7$, то наша задача сводится к тому, чтобы найти наименьшее число R такое, что внутри кольца с центром A_0, образованного окружностями радиусов 1 и R, можно расположить две точки A_1 и A_2, для которых расстояние A_1A_2 не меньше 1 и угол $A_1A_0A_2$ не превосходит $\frac{360°}{7}$. В силу результата задачи 20 для этого необходимо, чтобы было $2 \arcsin \frac{1}{2R} \geqslant \frac{360°}{7}$. Отсюда следует, что $R_8 = \frac{1}{2 \sin \frac{180°}{7}} = 1,15 \ldots$ (рис. 207, *б*).

Совершенно так же находим

$$R_9 = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{8}} = 1{,}30\ \ldots, \quad R_{10} = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{9}} = 1{,}46\ \ldots,$$

$$R_{11} = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{10}} = 1{,}61\ \ldots.$$

Примечание. Отметим, что при $n > 11$ мы будем иметь $R_n - \frac{1}{R_n} > 1$ и, соответственно этому, наиболее выгодное располо-

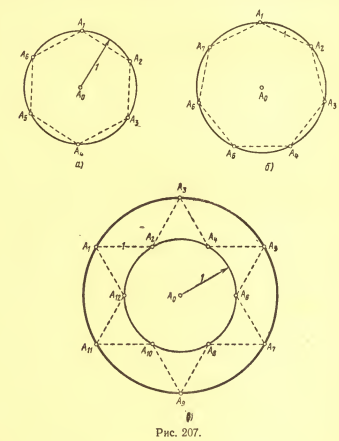


Рис. 207.

жение n точек уже не будет таким, как на рис. 207, б (см. решение задачи 20). Так, например, с помощью второй из формул решения

задачи 20 нетрудно вывести, что $\arccos\frac{R_{13}}{2}=\frac{360^\circ}{12}$, откуда $R_{13}= 2\cos 30^\circ=\sqrt{3}=1{,}73\ \dots$; расположение 13 точек в круге радиуса $\sqrt{3}$, удовлетворяющее условию задачи, будет иметь вид, изображенный на рис. 207, *в*.

б) Решение этой задачи близко к решению задачи а) и также основывается на теореме задачи 20.

На каждой стороне длины 1 правильного шестиугольника вне его построим квадрат (рис. 208). Вершины квадратов, не являющиеся вершинами исходного шестиугольника, служат, как легко видеть, вершинами правильного двенадцатиугольника. Радиус круга, описанного около этого двенадцатиугольника, равен $\frac{1}{2}:\sin 15^\circ=1{,}93\ \dots$ Таким образом, вершины всех квадратов вместе с центром шестиугольника образуют систему из 19 точек, которую можно заключить в круг радиуса 1,93 . . ., т. е. радиуса, меньшего 2; при этом расстояние между ближайшими из этих точек равно 1.

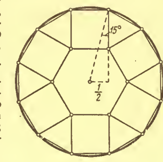


Рис. 208.

Покажем теперь, что 20 точек, удовлетворяющих условию задачи, нельзя поместить внутри круга радиуса 2. В решении задачи а) мы показали, что радиус наименьшего круга, внутри которого можно поместить 10 точек так, что одна из точек совпадает с центром круга и расстояния между каждыми двумя точками не меньше 1, равен $\frac{1}{2\sin 20^\circ}=1{,}46\ \dots$ Поэтому внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1 и 1,45, нельзя поместить девять точек, расстояния между каждыми двумя из которых не меньше 1. Точно так же можно показать, что внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1,45 и 2, нельзя поместить 13 точек, расстояния между каждыми двумя из которых не меньше 1: угол, под которым виден из центра кольца отрезок, соединяющий какие-либо две из этих точек, не меньше $\arccos\frac{3+(1{,}45)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}45}\approx 28{,}3^\circ$, а $13\cdot 28{,}3^\circ>360^\circ$. Отсюда следует, что *если* 20 *точек, удовлетворяющих условию задачи, помещаются внутри круга радиуса* 2, *то либо семь точек помещаются внутри кольца C, образованного окружностями радиусов* 1 *и* 1,45, *а* 12 *точек — вне этого кольца, либо восемь точек помещаются внутри C, а* 11 *— вне C* (20-й точкой в обоих случаях является центр *O* окружности). Рассмотрим отдельно оба эти случая.

1°. *Семь точек $A_1, A_2, \dots, A_7$ расположены внутри кольца C, а 12 точек $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ — вне этого кольца* (рис. 209, *а*). Мы будем считать, что как первые семь точек, так и последующие 12 точек следуют друг за другом в выписанном порядке при обходе вокруг центра круга. Отметим прежде всего, что ни одна из первых семи точек не может быть расположена вне кольца, образованного

окружностями радиусов 1 и 1,30. Действительно, если бы, например, точка A_1 лежала вне этого кольца, то каждый из углов A_1OB_1

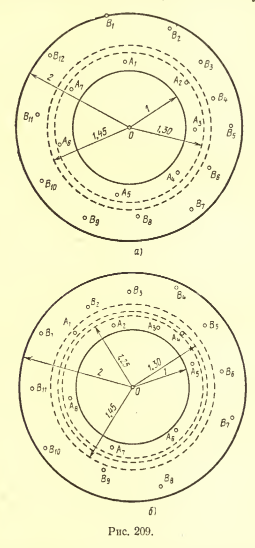


Рис. 209.

и A_1OB_2, где O — центр круга, а B_1 и B_2 — две ближайшие к A_1 точки B, расположенные с разных сторон от OA_1, был бы не меньше $\arccos \frac{3+(1,3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1,3} = 25,5^\circ$ ... (см. решение задачи 20). Следо-

вательно, мы имели бы $\angle B_1OB_2 > 51{,}0°$. Далее, в силу результата задачи 20, каждый из углов B_2OB_3, B_3OB_4, ..., $B_{11}OB_{12}$, $B_{12}OB_1$ не меньше 28,3° (см. выше). Но

$$11 \cdot 28{,}3° + 51{,}0° > 360°,$$

откуда и следует наше утверждение.

Таким образом, мы можем утверждать, что 12 *точек расположены вне кольца C, а семь точек — внутри меньшего кольца c, образованного окружностями радиусов* 1 *и* 1,30. При этом, в силу результата задачи а), все последние семь точек не могут лежать внутри кольца, образованного окружностями радиусов 1 и 1,15. Пусть, например, точка A_1 лежит вне этого кольца. Далее можно показать, что хотя бы одна из шести остальных точек расположена *вне кольца c′, образованного окружностями радиусов* 1 *и* 1,10: действительно, если бы все шесть точек A_2, A_3, ..., A_7 лежали внутри этого кольца, то углы A_2OA_3, A_3OA_4, ..., A_6OA_7 были бы не меньше $2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}1} \approx 54{,}0°$; углы A_1OA_2 и A_1OA_7 были бы не меньше $2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}3} \approx 45{,}2°$, а

$$5 \cdot 54{,}0° + 2 \cdot 45{,}2° > 360°.$$

Пусть B_1 и B_2 — точки B, наиболее близкие к A_1 и расположенные с разных сторон от OA_1; в таком случае углы A_1OB_1 и A_1OB_2 не меньше $\arccos \frac{3 + (1{,}15)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1{,}15} \approx 20{,}0°$ и угол B_1OB_2 не меньше 40,0°. Точно так же, используя то, что одна из остальных точек A расположена вне кольца c, можно показать, что один из углов B_1OB_2, B_2OB_3, ..., $B_{12}OB_1$ не меньше $2 \arccos \frac{3 + (1{,}1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1{,}1} \approx$ $\approx 2 \cdot 16{,}8° = 33{,}6°$. Если это тот же угол B_1OB_2, который фигурировал у нас выше, то он должен быть даже не меньше чем $20{,}0° + 45{,}2° + 16{,}8° = 82{,}0°$ (ибо угол между каждыми двумя из точек A не меньше $2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}3} \approx 45{,}2°$); в этом случае мы приходим к противоречию, так как

$$11 \cdot 28{,}3° + 82{,}0° > 360°.$$

Если же среди углов B_1OB_2, B_2OB_3, ..., $B_{12}OB_1$ есть один, не меньший 40,0°, и один, не меньший 33,6°, то мы также придем к противоречию, если только воспользуемся тем, что в силу результата задачи а) не более девяти из наших 20 точек могут быть расположены внутри окружности радиуса 1,60 и, следовательно, не более двух из точек B заключаются внутри этой окружности. Поэтому по крайней мере 8 из 12 углов B_1OB_2, B_2OB_3, ..., $B_{12}OB_1$ не меньше чем $2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 2} \approx 28{,}9°$. Таким образом, в этом случае сумма углов $B_1OB_2 + B_2OB_3 + \ldots + B_{12}OB_1$ не меньше чем

$$40{,}0° + 33{,}6° + 6 \cdot 28{,}9° + 4 \cdot 28{,}3° > 360°.$$

Этим и заканчивается разбор случая 1°.

2°. *Восемь точек $A_1, A_2, \ldots, A_8$ расположены внутри кольца C, а 11 точек $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$ — вне этого кольца* (рис. 209, *б*). При этом, в силу результата задачи а), все восемь точек A не могут быть расположены внутри круга радиуса 1,30: хотя бы одна из этих точек (будем считать, что это A_1) находится в н е этого круга. Далее совершенно аналогично тому, как мы рассуждали при разборе случая 1°, можно показать, что из восьми точек A не менее д в у х лежат вне круга радиуса 1,25: это следует из того, что

$$6 \cdot 2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}25} + 2 \cdot 2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}45} \approx 6 \cdot 47{,}1^\circ + 2 \cdot 40{,}3^\circ > 360^\circ;$$

значит, кроме A_1, еще какая-то из точек A лежит в н е этого круга. Наконец, точно так же покажем, что из восьми точек A не менее т р е х лежат вне круга радиуса 1,15: это следует из того, что

$$4 \cdot 2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}15} + 4 \cdot 2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}45} \approx 4 \cdot 51{,}5^\circ + 4 \cdot 40{,}3^\circ > 360^\circ;$$

следовательно, кроме точек, упомянутых выше, еще одна точка A лежит в н е этого круга.

Пусть теперь B_1 и B_2 — точки B, наиболее близкие к точке A_1 и расположенные с обеих сторон от OA_1; в таком случае углы A_1OB_1 и A_1OB_2 не меньше чем $\arccos \frac{3 + (1{,}3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1{,}3} \approx 25{,}5^\circ$, и угол B_1OB_2 не меньше $51{,}0^\circ$. Точно так же, используя то, что еще одна из точек A лежит вне круга радиуса 1,25 и одна — вне круга радиуса 1,15, можно показать, что один из углов B_1OB_2, B_2OB_3, ..., $B_{12}OB_1$ не меньше $2 \arccos \frac{3 + (1{,}25)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1{,}3} \approx 2 \cdot 24{,}1^\circ = 48{,}2^\circ$. Если какие-либо два из этих трех «больших» углов совпадают, то соответствующий угол не меньше чем $20{,}0^\circ + 24{,}1^\circ + 40{,}3^\circ = 84{,}4^\circ$ (ибо каждый из углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_8OA_1 не меньше чем $2 \arcsin \frac{1}{2 \cdot 1{,}45} \approx 40{,}3^\circ$); в этом случае мы приходим к противоречию, так как

$$10 \cdot 28{,}3^\circ + 84{,}4^\circ > 360^\circ.$$

Если же из углов B_1OB_2, B_2OB_3, ..., $B_{12}OB_1$ один не меньше $51{,}0^\circ$, другой не меньше $48{,}2^\circ$ и третий не меньше $40{,}3^\circ$, то мы снова приходим к противоречию, так как

$$51{,}0^\circ + 48{,}2^\circ + 40{,}3^\circ + 8 \cdot 28{,}3^\circ > 360^\circ.$$

Этим заканчивается разбор случая 2°.

Таким образом, наибольшее число точек, которые можно расположить с соблюдением условий задачи, равно 19.

119. М о ж н о; для этого достаточно[1]) *расположить эти станции в вершинах вписанного в поверхность планеты куба.*

В самом деле, из точки A поверхности планеты видны все точки, расположенные на высоте D над кругом («шапочкой») на поверхности планеты с центром A и радиусом ρ; здесь величина ρ определяется из того условия, что «угловая мера» ρ соответствую-

[1]) и необходимо.

щей дуги r «большой окружности» (окружности, радиус которой равен радиусу $\frac{D}{2}$ сферы) удовлетворяет равенству

$$\cos\rho = \frac{OA}{OM} = \frac{D/2}{D + D/2} = \frac{1}{3}, \quad \text{т. е.} \quad \rho = \arccos\frac{1}{3}$$

(рис. 210). С другой стороны, «угловое расстояние» ρ_1 между двумя соседними вершинами вписанного в сферу куба как раз равно $\arccos\frac{1}{3}$: в самом деле, если O есть центр куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, а A и B — две его соседние вершины (сделайте чертеж!), то, поскольку диагональ AC_1 куба равна

$$\sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3},$$

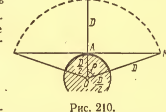


Рис. 210.

угол $AOB = \rho_1$ определяется из равнобедренного треугольника с боковыми сторонами $OA = OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и основанием $AB = a$; поэтому, в силу теоремы косинусов,

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\rho_1 = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\cos\rho_1,$$

т. е.

$$\cos\rho_1 = \frac{\frac{3a^2}{2} - a^2}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда и вытекает, что если покрыть сферу восемью кругами углового радиуса ρ с центрами в вершинах вписанного куба, то каждая точка куба будет покрыта по крайней мере двумя кругами, — что нам и требовалось доказать.

120. а) Рассмотрим последовательно случаи $n = 2$, 3, 4, 5 и 6.

1°. $n = 2$. Очевидно, что в этом случае *наиболее выгодно поместить две точки в диаметрально противоположных точках сферы* (рис. 211, a); расстояние между этими точками будет равно диаметру $2R$ сферы.

2°. $n = 3$. Плоскость, проведенная через какие-либо три точки сферы, пересекает сферу по окружности S. Для того чтобы наименьшее из расстояний между всевозможными парами из трех точек было наибольшим, необходимо, чтобы эти точки располагались в вершинах *равностороннего* треугольника, вписанного в окружность S; при этом расстояние между каждыми двумя точками будет равно $r\sqrt{3}$, где r — радиус окружности S. Но радиус r

окружности S, полученной в сечении сферы не может быть больше радиуса R сферы, причем $r = R$ только в том случае, если плоскость сечения проходит через центр сферы (S есть большая окружность сферы). Отсюда следует, что *наиболее выгодным расположением трех точек будет такое, при котором они помещаются в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в большую*

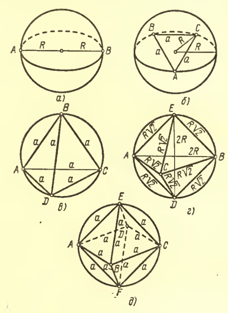


Рис. 211.

окружность сферы (рис. 211, *б*); расстояние между каждыми двумя точками в этом случае равно $R\sqrt{3}$.

3°. $n = 4$. Рассмотрим прежде всего следующую задачу: *расположить на сфере радиуса R четыре точки A, B, C и D так, чтобы расстояния от D до остальных трех точек были не меньше заданной величины a и наименьшее из попарных расстояний между точками A, B и C* (обозначим его через b) *было бы возможно бо́льшим.* Так как по условию расстояния DA, DB и DC не меньше a, то точки A, B и C находятся вне области данной сферы, высекаемой шаром $Ш$ радиуса a с центром в точке D. Отсюда аналогично случаю 2° можно заключить, что точки A, B и C следует расположить в вершинах равностороннего треугольника, причем описанная около этого треугольника окружность S должна быть большой окружностью сферы, если $a \leqslant R\sqrt{2}$, и должна совпадать с окружностью, по которой шар $Ш$ пересекает сферу, если $a \geqslant R\sqrt{2}$ (R есть радиус сферы). При этом, очевидно, в первом случае $b = R\sqrt{3}$, а во втором $b = r\sqrt{3}$, где r есть радиус окружности S.

Теперь остается только найти такое значение a, при котором *наименьшее из расстояний a, b было бы возможно большим.* Но нетрудно видеть, что если $a \geqslant R\sqrt{2}$, то

$$a^2 = 2R\sqrt{a^2 - r^2}$$

(рис. 212); отсюда получаем

$$r^2 = \frac{4R^2a^2 - a^4}{4R^2} = R^2 - \frac{(2R^2 - a^2)^2}{4R^2};$$

далее, так как $b = r\sqrt{3}$, то

$$b^2 = 3r^2 = 3R^2 - \frac{3(2R^2 - a^2)^2}{4R^2}.$$

Из последней формулы нетрудно вывести, что

$$\text{если} \quad a^2 = \frac{8}{3}R^2, \quad \text{то} \quad b^2 = \frac{8}{3}R^2;$$

$$\text{если} \quad a^2 > \frac{8}{3}R^2, \quad \text{то} \quad b^2 < \frac{8}{3}R^2.$$

Отсюда следует, что *решением задачи будут служить* четыре точки A, B, C и D, расположенные на сфере на равных расстояниях друг от друга:

$$AB = AC = AD = BC = CD = BD = \sqrt{\frac{8}{3}}R,$$

т. е. *четыре точки, расположенные в вершинах вписанного в сферу правильного тетраэдра* (черт. 211, *в*).

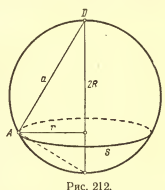


Рис. 212.

4°. $n = 5$, 6. Заметим прежде всего, что *на сфере радиуса R нельзя расположить больше четырех точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя из этих точек было больше $R\sqrt{2}$.* Это утверждение равносильно следующему: *из одной точки* (центра сферы) *нельзя провести более четырех лучей, попарно образующих тупые углы* (см. выше задачу 35). Поэтому решение задачи в случаях $n = 5$ и $n = 6$ будет даваться такими расположениями точек, при которых наименьшее из попарных расстояний между точками равно $R\sqrt{2}$. В случае $n = 6$ имеется единственное такое расположение, даваемое рис. 211, *д* (*шесть точек в вершинах правильного октаэдра, вписанного в сферу*); в случае $n = 5$ можно найти бесконечно много таких расположений (см., например, рис. 211, *г*, где восемь из попарных расстояний между точками равны $R\sqrt{2}$, а два — равны $2R$).

б) Из относящихся к случаям $n = 5$, 6 задачи а) рассуждений следует, что ответ на вопрос 1° дается *шестью* вершинами вписанного в сферу правильного октаэдра; ответ на вопрос 2° дается числом *четыре* (и здесь можно указать бесконечно много разных расположений).

ЛИТЕРАТУРА

А. Книги и статьи общего характера

1. В. Г. Болтяиский и И. М. Яглом, Геометрические задачи иа максимум и миинмум, Эициклопедия элемеитариой математики, ки. V, М., «Наука», 1956, стр. 270—348.

2. Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика?, М., «Просвещеиие», 1968.

Геометрическим задачам иа максимум и миинмум посаящеиа большая гл. VII «Maxima и minima» этой книги.

3. Д. Пойя, Математика и правдоподобиые рассуждеиия, М., ИЛ, 1957.

Эта кийга нмеет методологический характер — оиа посаящеиа обсуждению иекоторых общих приицилоа математического творчестаа (которое может заключаться и просто в решеиии задач). Тема о геометрических задачах иа максимум и миинмум затрагиаается а гл. VIII «Мвксимумы и миинмумы» и а гл. X «Изопериметрическая задача»; а иесколько меньшей степеии с ией саязаиа гл. IX «Физическая математика».

4. Д. О. Шклярский, Н. Н. Чеицов, И. М. Яглом, Геометрические иеравеиства и задачи иа максимум и миинмум, М., «Наука», 1970.

Сборник задач, состаалеиный по тому же плаиу, что н иастоящая книга.

5. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхиости и изопериметрии, М., «Наука», 1966.

Серьезиая монография, содержащая обстоятельное обсуждение самого смысла понятий «объем» и «площадь поверхиости» со специальным аыделением относящнхся к этим поиятиям экстремальных задач.

6. Н. Д. Казариинов (N. D. Kazarinoff), Геометрические иераверства (Geometric inequalities), New York — Toronto, 1961.

Книга входит в рассчитаниую ив иачниающнх матемвтикоа (а первую очередь — иа ннтересующихся математикой учащихся старших классоа средней школы) серию «Ноаая математическая библиотека», издаваемую высокоавторитетиой «Исследоаательской группой по школьиой математике» (School Mathematics Study Group, сокращеиио — SMSG), объедииющей миогих крупиых америкаиских математикоа и ииициатиаиых педагогоа.

7. О. Боттема, Р. Джорджевич, Р. Яиич, Д. Митринович, П. Васич (O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić), Геометрические иеравеиства (Geometric Inequalities), Groningen, 1969.

Обшириое собрание геометрических задач иа нерааеиства, сопровождаемых ссылкамн на литературу и (иногда) указаииями к решеиию задач нли даже полиымн решеннями.

Б. Книги, в которых уделяется место геометрическим задачам на максимум и минимум

8. Г. С. Коксте р, Введение в геометрию, М., «Наука», 1966.

9. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, М., Учпедгиз, 1967.

В «теоретической части» этого обширного курса элементарной геометрии задачам на максимум и минимум уделяется мало внимания; однако некоторые из приложенных к книге (весьма многочисленных) задач (в указанном издании сопровождаемых подробными решениями) связаны с отысканием наибольших и наименьших значений геометрических величин.

10. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Прямые и кривые, М., «Наука», 1969.

Эта небольшая книжка входит в серию «Библиотечка физико-математической школы», рассчитанную на учащихся старших классов, проявляющих интерес к математике; в ней много мест уделено геометрическим задачам на максимум и минимум.

11. А. А. Леман (составитель), Сборник задач московских математических олимпиад, М., «Просвещение», 1965.

12. Е. А. Морозова и И. С. Петраков, Международные математические олимпиады, М., «Просвещение», 1971.

13. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы планиметрии, М., «Наука», 1967.

14. З. А. Скопец и В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии, М., Учпедгиз, 1962.

См. также журналы «Квант» (в первую очередь — «Задачник „Кванта"» и примыкающие к этому разделу статьи) и «Математика в школе» (где регулярно печатаются обзоры задач московских, всесоюзных и международных олимпиад).

В. Книги и статьи по комбинаторной геометрии

15. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, Разбиение фигур на меньшие части, М., «Наука», 1971.

16. Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, Комбинаторная геометрия плоскости, М., «Наука», 1965; см. также расширенное английское издание той же книги: Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, В. Кли (H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee), Комбинаторная геометрия плоскости (Combinatorial geometry in the plane), New York — Chicago — San Francisco — Toronto — London, 1964.

17. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., «Наука», 1965.

18. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, Теорема Хелли и ее применения, М., «Мир», 1968.

19. Б. Грюнбаум, Этюды по комбинаторной геометрии и по теории выпуклых тел, М., «Наука», 1971.

20. И. М. Яглом, О комбинаторной геометрии, М., «Знание», 1971.

Рассчитанные на сравнительно широкого читателя книги и брошюры [15]—[20] содержат обзоры отдельных разделов комбинаторной геометрии, достаточно характерных для этого научного направления.

21. И. М. Яглом, Как разрезать квадрат?, М., «Наука», 1968.

22. В. Бестон (V. J. D. Baston), Некоторые свойства многогранников в евклидовом пространстве (Some properties of polyhedra in euclidean space), Oxford, 1965.

Книги [21] и [22] посвящены сравнительно узкой проблематике, бесспорно относящейся к комбинаторной геометрии, хотя, быть может, и не центральной для нее.

23. Г. Д. Чакериан (G. D. Chakerian), Свойства пересечений и покрытий выпуклых фигур (Intersection and covering properties on convex sets), American Math. Monthly, 76, № 7, 1969, стр. 753—766.

Обзор некоторых комбинаторно-геометрических результатов, по тематике и характеру близкий к обзору [18] и частично дополняющий этот обзор.

Г. Книги и статьи по дискретной геометрии и по теории выпуклых тел

24. Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматгиз, 1958; см. также 2-е дополненное немецкое издание той же книги: L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf die Kugel und im Raum, Berlin — Heidelberg — New York, 1972.

25. К. А. Роджерс, Укладки и покрытия, М., «Мир», 1968.

26. Е. П. Барановский, Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны, сборник «Итоги науки», серия «Математика», вып. 16 — «Алгебра. Топология. Геометрия. 1967», М., изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1969, стр. 189—225.

Книги [24], [25] и обзор [26] посвящены так называемой «дискретной геометрии», о которой говорится в предисловии к настоящей книге.

27. Д. А. Крыжановский, Изопериметры, М., Физматгиз, 1959.

Небольшая книжка содержит элементарное изложение круга вопросов, связанных с так называемой «изопериметрической задачей» (см. стр. 66).

28. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом, Выпуклые фигуры и тела, Энциклопедия элементарной математики, кн. V, Геометрия, М., Физматгиз, 1963, стр. 181—269.

29. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М. — Л., Гостехиздат, 1951; см. также несколько более полные немецкий и английский переводы той же книги: I. M. Jaglom, W. G. Boltjanski, Konvexe Figuren, Berlin (DDR), 1956; I. M. Yaglom, V. G. Boltyanskiĭ, Konvex figures, New York, 1961.

30. В. Бляшке, Круг и шар, М., «Наука», 1967.

Статья [28] и книги [29], [30] посвящены теории выпуклых тел; в них много места уделено связанным с выпуклыми фигурами и телами задачам на максимум и минимум.

31. Т. Боннезен, В. Фенхель (T. Bonnesen, W. Fenchel), Теория выпуклых тел (Theorie der konvexen Körper), Berlin, 1934.

32. Г. Хадвигер (H. Hadwiger), Старое и новое о выпуклых телах (Altes und neues über konvexe Körper), Basel — Stuttgart, 1965.

33. Г. Г. Эглстон (H. G. Eggleston), Выпуклость (Convexity), Cambridge, 1958.

34. Г. Г. Эглстон, Проблемы в евклидовом пространстве; приложения выпуклости (Problems in euclidean space; Applications of convexity), London, 1957.

35. Р. В. Бенсон (R. V. Benson), Евклидова геометрия и выпуклость (Euclidean geometry and convexity), New York, 1966.

36. Ф. А. Валентин (F. A. Valentine), Выпуклые множества (Convex sets), New York, 1964; Convexe Mengen, Mannheim — Zürich, 1968.

Все книги [31]—[36] (они рассчитаны на сравнительно квалифицированного читателя) много внимания уделяют экстремальным задачам, связанным с выпуклыми телами.

37. В. Л. Кли (V. Klee, редактор), Выпуклость (Convexity), Providence, 1963; Труды коллоквиума по выпуклости (Proceedings of the Colloqium on Convexity; составитель W. Fenchel), Copenhagen, 1967.

Обширные тома [37] содержат доклады, прочитанные на симпозиумах по проблемам выпуклости, состоявшихся в г. Сиэттле (США) в 1961 г. и в Копенгагене в 1965 г.; многие из этих докладов были посвящены конкретным экстремальным задачам о выпуклых телах или определенным типам таких задач. Наряду с этим обе книги содержат списки нерешенных проблем по теории выпуклых тел, многие из которых также связаны с геометрическими оценками или с отысканием наибольших и наименьших значений геометрических величин.

Д. Литература к отдельным циклам задач

1. *Оценки расстояний*

38. Ю. А. Шрейдер, Что такое расстояние?, М., Физматгиз, 1963.

2. *Оценки углов*

39. Л. Блюменталь (L. M. Blumenthal), Теория и приложения геометрии расстояний (Theory and applications of distance geometry), Oxford, 1953.

40. П. Эрдёш, Некоторые нерешенные проблемы, журнал переводов «Математика», 7, № 4, 1963, стр. 109—143.

41. Г. Секереш (G. Szekeres), Об одной экстремальной проблеме планиметрии (On an extremum problem in the plane), Amer. Journ. of Math., **63**, 1941, стр. 208—210; П. Эрдёш, Г. Секереш (P. Erdös), О некоторых экстремальных задачах элементарной геометрии (On some extremum problems in elementary geometry), Annales Universitates Scientiarum Budapestinesis de Rolando Eötvös nominantae, **3—4**, 1960/61, стр. 53—62.

42. Р. Келлер (R. F. Keller), Одно замечание о минимуме максимального из углов, образованных пятью точками трехмерного пространства (A remark on the minimum of the maximum angle of the angles determined by five points in E_3), Amer. Math. Monthly, 74, 1967, стр. 1232.

43. Л. Данцер, Б. Грюнбаум (L. Danzer, B. Grünbaum), О двух проблемах, связанных с выпуклыми телами и принадлежащих П. Эрдёшу и В. Кли (Über zwei Problem bezuglich

konvexer Körper von P. Erdös und V. L. Klee), Math. Zeitschrift, **79**, 1962, стр. 95—99.

44. Г. Крофт (H. T. Croft), О 6-точечных конфигурациях в трехмерном пространстве (On 6-point configurations in 3-space), Journ. London Math. Society, **36**, 1961, стр. 289—306.

45. Б. Грюнбаум, Вполне диаметрально-противоположные множества точек (Strictly antipodal sets), Israel Journ. of Math., **1**, 1963, стр. 5—10.

46. К. Шютте (K. Schütte), Минимальный диаметр конечных точечных множеств с заданным наименьшим расстоянием между точками (Minimale Durchmesser endlicher Punktmengen mit vorgeschriebenen Midestabstand), Math. Annalen, **150**, 1963, стр. 91—98.

47. Г. Крофт, 9-точечные и 7-точечные конфигурации в трехмерном пространстве (9-point and 7-point configurations in 3-space), Proc. London Math. Society, (3) **12**, 1962, стр. 400—424; Поправка, там же, (3) **13**, 1963, стр. 384.

48. Л. Мозер (L. Moser), О различных расстояниях, определяемых n точками (On the different distances determined by n points), Amer. Math. Monthly, **59**, 1952, стр. 85—91.

49. Р. М. Робинсон (R. M. Robinson), Расположения 24 точек на сфере (Arrangements of 24 points on a sphere), Math. Annalen, **144**, 1961, стр. 17—48.

50. Р. М. Робинсон, Конечные системы точек на сфере, каждая из которых является ближайшей для пяти других (Finite sets on a sphere with each nearest to five others), Math. Annalen, **179**, 1969, стр. 296—318.

3. *Оценки площадей*

51. Е. Б. Дынкин, Задача 10, Математическое просвещение (новая серия), вып. 2, М., Гостехиздат, 1957, стр. 268.

52. В. А. Залгаллер (W. A. Zalgaller), Экстремальная задача из геометрии треугольника (Extremalne zagadnienie w geometrii trójkąta), Matematyka (Warszawa), **19**, № 2, 1966, стр. 49—53.

53. Дж. Хаммерсли (J. M. Hammersley), Об ущербе, который приносит математическим способностям школьников и студентов «современная математика» и подобная ей интеллектуальная мура (On the enfeeblement on mathematical skills by «Modern Mathematics» and by similar soft intellectual trash in schools and universities), Bull. Inst. of Math. and its Applications, **4**, № 4, 1968, стр. 3—22.

54. Д. Клейтон, М. Крилгер (D. Kleiton, M. Krilger), Упаковки квадратов в прямоугольники (Packing squares in rectangles), Annals of New York Acad. Science, **175**, № 1, 1970, стр. 253—262.

55. А. Меир, Л. Мозер (A. Meir), Об упаковках квадратов и кубов (On the packing of squares and cubes), Journ. of Combinatorial Theory, **5**, 1969, стр. 126—134.

56. Т. Радо (T. Radò), Об одной теореме, связанной с теоремой Витали (Sur une problème relatif a une théorème de Vitali), Fundamenta Math., 11, 1928, стр. 868—869.

57. А. С. Соколин, Об одной задаче Радо, Доклады Академии наук СССР, 26, № 9, 1940, стр. 868—869.

58. Р. Радо (R. Rado), Несколько теорем о покрытиях I—III (Some covering theorems I—III), Proc. London Math. Soc., 51, 1950, стр. 232—264; там же, 53, 1951, стр. 243—267; Journal London Math. Soc., 42, 1968, стр. 127—130.

59. В. А. Залгаллер, Замечания о задаче Радо, Математическое просвещение (новая серия), вып. 5, М., Физматгиз, 1960, стр. 141—148.

59а. М. Айтаи (M. Ajtai), Решение одной проблемы Радо (The solution of a problem of T. Radò), Bull. Acad. pol. sci., Ser. sci. math., astron. et phys., 21, 1973, стр. 61—63.

60. К. Ф. Рот (K. F. Roth), О проблеме Хейлброна (On problem of Heilbronn), Journ. London Math. Soc., 26, 1951, стр. 198—209.

61. М. Гольдберг (M. Goldberg), Максимизация наибольшего из треугольников, образуемых n точками в квадрате (Maximizing the smallest triangle made by n points in a square), Math. Magazine, 45, № 3, 1972, стр. 135—144.

62. М. Фреше (M. Fréchet), Вероятности, связанные с системой совместимых и зависимых событий (Les probabilités associées a un sistème d'evenements compatibles et dépendants), I, Paris, 1940; II, Paris, 1943.

63. И. М. Яглом, Е. И. Файнберг, Оценки для вероятностей сложных событий, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1962, стр. 297—303.

64. С. А. Пирогов, Вероятности сложных событий и линейное программирование, Теория вероятностей и ее применения, 13, № 2, 1968, стр. 344—348.

4. Несколько свойств выпуклых многоугольников

65. Б. Грюнбаум, Выпуклые многогранники (Convex polytopes), London — New York — Sydney, 1967.

66. П. Мак-Маллен, Г. Шепард (P. McMullen, G. C. Shephard), Выпуклые многогранники и гипотеза о максимальном числе граней (Convex polytopes and the upper bound conjecture), Cambridge, 1971.

67. Я. В. Успенский (J. V. Uspensky), Любопытный случай применения в геометрии метода математической индукции (A curious case of the use of mathematical induction in geometry), Amer. Math. Monthly, 34, № 5, 1927, стр. 247—250.

68. Р. Г. Бинг, Н. Д. Казаринов, О конечности числа отражений, переводящих плоский невыпуклый многоугольник в выпуклый, Математическое просвещение (новая серия), вып. 6, М., Физматгиз, 1961, стр. 205—207.

69. Дж. Ацель, Л. Фукс (J. Aczél, L. Fuchs), Одна экстремальная задача о площадях вписанного в круг многоугольника и многоугольника, описанного вокруг круга (A minimum-problem on a areas of inscribed and circumscribed polygons of a circle), Compositio mathematica, **8**, № 1, 1950, стр. 61—67.

5. Задачи, связанные с понятием диаметра фигуры

70. П. Бейтман, П. Эрдёш (P. Bateman), Геометрические экстремумы, подсказанные одной леммой Безиковича (Geometrical extrema suggested by a lemma of Besicovitch), Amer. Math. Monthly, **58**, № 5, 1951, стр. 306—314.

71. С. Винце (S. Vincze), Об одной геометрической задаче на экстремум (On a geometrical extremum problem), Acta Scientiarum mathematicarum (Szeged), **12A**, 1950, стр. 136—142.

72. К. Рейнгардт (K. Reinhardt), Экстремальные многоугольники заданного диаметра (Extremale Polygone gegebenen Durchmessers), Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung, **31**, 1922, стр. 251—270.

73. П. Эрдёш, О множестве расстояний между n точками (On sets of distances of n points), Amer. Math. Monthly, **53**, 1946, стр. 248—250.

74. Х. Хопф, Е. Паннвиц (H. Hopf, E. Pannvitz), Задача 167 (Aufgabe 167), Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung, **43**, 1934, стр. *114* [1]); **45**, 1935, стр. *33* [1]).

75. Б. Грюнбаум, Доказательство предположения Важоньи (A proof of Vászonyi's conjecture), Bull. Research Council Israel, сер. A, **6**, 1956, стр. 77—78; А. Хеппеш (A. Heppes), Доказательство предположения А. Важоньи (Beweis einer Vermutung von A. Vászonyi), Acta Math. Sci. Hungar., **7**, 1957, стр. 463—466; С. Страцёвич (S. Straszewicz), Об одной геометрической задаче П. Эрдёша (Sur une problème geometrique de P. Erdös), Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 1957, стр. 39—40.

76. П. Эрдёш, О множестве расстояний между n точками евклидова пространства (On sets of distances of n points in Euclidean space), Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **5**, 1960, стр. 165—169.

77. П. Эрдёш, Задача 250 (Aufgabe 250), Elemente der Math., **10**, 1955, стр. 114; **11**, 1956, стр. 137.

78. Ю. Г. Дуткевич, О диаметре множества средних точек хорд ограниченного выпуклого множества, Матем. заметки, **6**, № 2, 1969, стр. 233—236.

79. Л. Стахо (L. Stachó), Об одной задаче, касающейся семейств кругов (Über ein Problem für Kreisscheibenfamilien), Acta Sci. Math. (Szeged), **25**, 1965, стр. 273—282.

---

[1]) В этом журнале наряду с основной (прямой) имеется и независимая от нее *курсивная* нумерация страниц (на нумерованных курсивными цифрами страницах печатаются задачи и их решения).

80. Г. У. Е. Юнг (H. W. E. Jung), О наименьшем шаре, содержащем пространственную фигуру (Über den kleinsten Kugel, die eine räumliche Figur einschießt), Jurn. reine und angew. Math., **123**, 1901, стр. 241—257; О наименьшем круге, содержащем плоскую фигуру (Über den kleinste Kreis, der eine ebene Figur einschließt), там же, **137**, 1910, стр. 310—313.

81. Г. Мешковский (H. Meschkowski), Нерешенные и неразрешимые геометрические задачи (Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie), Braunschweig, 1960.

82. Ю. Пал (J. Pál), Об одной элементарной вариационной проблеме (Über eine elementares Variationsproblem), Kgl. Danske Vid. Selskab., Mat.-fys. Medd., **3**, № 2, 1920, стр. 3—35.

83. Р. Шпраг (R. Sprague), Об одной элементарной вариационной проблеме (Über eine elementares Variationsproblem), Math. Tideskrift, 1936, стр. 96—99.

84. Г. Эглстон, Минимальные универсальные покрышки в E^n (Minimal universal covers in E^n), Israel Journ. of Math., **1**, 1963, стр. 149—155.

85. А. Кирш (A. Kirsch), Замыкающий шар точечной совокупности (Die Pferchkugel eines Punkthaufens), Math.-Phys. Semesterberichte, **3**, 1953, стр. 214—218.

86. Д. Гейл (D. Gale), О включении n-мерных множеств в правильный n-мерный симплекс (On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex), Proc. Amer. Math. Soc., **4**, 1953, стр. 222—225.

87. Б. Грюнбаум, Простое доказательство предположения Борсука для трехмерного пространства (A simple proof of Borsuk's conjucture in three dimensions), Proc. Cambridge Phil. Soc., **53**, 1957, стр. 776—778.

88. А. С. Безикович (A. S. Besicovitch), О дугах, которые нельзя покрыть внутренностью равностороннего треугольника со стороной 1 (On arcs that cannot be covered by an open equilateral tringle of side 1), Math. Gazette, **49**, № 369, 1965, стр. 286—288.

89. Г. Эглстон, О покрытии правильного многоугольника треугольником (On covering a regular polygon with a triangle), Proc. Cambridge Phil. Soc., **58**, 1962, стр. 8—11.

89a. Дж. Пуль, Дж. Герритс (G. Poole, J. Gerriets), Минимальные покрытия для дуг постоянной длины (Minimum covers for arcs of constant length), Bull. Amer. Math. Soc., **79**, 1973, стр. 462—463.

90. В. Бляшке (W. Blaschke), О наибольшем круге выпуклого множества точек (Über den größten Kreis einer konvexen Punktmenge), Jahresber. Deutsch. Math. Vereinigung, **23**, 1914, стр. 369—374.

91. К. Борсук (K. Borsuk), О разложении n-мерного евклидова шара в n множеств (Über die Zerlegung einer euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen), Verhandlungen Intern. Math. Kongr., Zürich, **2**, 1932, стр. 192; Три теоремы о n-мерной сфере (Drei Sätze über die n-dimensional Späre), Fundamenta Math., **20**, 1933, стр. 177—190.

92. А. Хеппеш, П. Ревес (P. Révész), К проблеме Борсука о разбиениях на части (Zum Borsukschen Zerteilungsproblem), Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 7, 1956, стр. 159—162.

93. Г. Эглстон, Покрытие трехмерного множества множествами меньшего диаметра (Covering of three-dimensional set with sets of smaller diameter), Journ. London Math. Soc., 30, 1955, стр. 11—24.

94. А. Хеппеш, Расщепление точечных множеств в трехмерном пространстве в объединение трех множеств меньшего диаметра (Térbeli ponthalmazok felosztása kisebb atmérögü reszhalmazok összegére), Magyar tudományos akad. Mat. Fis. Oszt. Közl., 7, 1957, стр. 413—416.

95. Р. Л. Грехем (R. L. Graham), О разбиениях равностороннего треугольника (On partitions of an equilateral triangle), Canadian Journ. Math., 19, 1967, стр. 394—409.

96. Г. Ленц (H. Lenz), О покрытии плоских точечных множеств множествами меньшего диаметра (Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers), Archiv Math., 7, 1956, стр. 34—40; Разложение плоских областей в выпуклые ячейки возможно меньшего диаметра (Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser), Jahresber. Deutsch. Math. Vereinigung, 58, 1956, стр. 87—97.

97. Г. Хадвигер, О разложении шара в меньшие части (Von der Zerlegung den Kugel in kleinere Teile), Gaz. Mat. Lisboa, 15, 1954, стр. 1—3.

98. Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

99. Е. Б. Дынкин, В. А. Успенский, Математические беседы, М. — Л., 1952.

Задачи о расположении точек и фигур

100. И. Кеплер (J. Kepler), О снежинке (De nive sexangula), Gesammelte Werke, Bd. 4, München, 1911, стр. 259—280.

101. К. Бендер (C. Bender), Определение наибольшего числа шаров одного радиуса, которые можно приложить к шару того же размера, что и другие (Bestimmung der größten Anzahl gleichgrößer Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen), Grunert Archiv, 56, 1874, стр. 302—313.

102. С. Гюнтер (S. Günter), Одна стереометрическая задача (Eine stereometrisches Problem), Grunert Archiv, 57, 1875, стр. 209—215.

103. К. Шютте, Б. Л. ван дер Варден (B. L. van der Waerden), Проблема тринадцати шаров (Das Problem der dreizehn Kugeln), Math. Annalen, 125, 1953, стр. 325—334.

104. Дж. Лич (J. Leech), Проблема тринадцати шаров (The problem of the thirteen spheres), Math. Gazette, 40, 1956, стр. 22—23.

105. Г. С. Кокстер (H. S. M. Coxeter), Верхняя граница для числа равных неперекрывающихся шаров, которые можно прило-

жить к еще одному шару того же самого размера (An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another on the same size), первый из сборников [37], стр. 53—71.

106. Л. Фейеш Тот, Замечания к одной теореме Р. М. Робинсона (Remarks on a theorem of R. M. Robinson), Studia Sci. Math. Hungar., 4, 1969, стр. 441—445.

107. Г. Хадвигер, О числе соседей для равных по параллельному переносу выпуклых тел (Über Treffanzahl bei translationsgleiche Eikörper), Archiv der Math., 8, 1957, стр. 212—213.

108. Л. Фейеш Тот, О числе равных дисков, которые могут касаться другого такого же (On the number of equal discs that can touch another of the same kind), Studia Sci. Math. Hungar., 2, 1967, стр. 363—367.

109. И. М. Яглом, Задачи трудные и легкие, Математическая школа (лекции и задачи), вып. IV—V, М., Изд-во МГУ, 1965, стр. 12—18.

110. К. Бёрёцки (K. Böröczky), О ньютоиовом числе правильных многоугольников (Über die Newtonische Zahl regulärer Vielecke), Period. Math. Hungar., **1**, № 2, 1971, стр. 113—119.

111. Н. Грёмер (H. Groemer), Оценки для числа выпуклых тел, касающихся даиного выпуклого тела (Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper die einen konvexen Körper berühren), Monatshefte für Math., **65**, 1961, стр. 74—81.

112. Б. Грюнбаум, Об одиом предположении Хадвигера (On a conjecture of Hadwiger), Pacific Journ. of Math., **11**, 1961, стр. 215—219.

113. К. Хальберг, Е. Левии, Е. Страус (C. J. A. Halberg, Jr., E. Levin, E. G. Straus), О соприкосновении конгруэнтных множеств в евклидовом пространстве (On contiguous congruent sets in euclidean space), Proceedings Amer. Math. Soc., **10**, 1959, 335—344.

114. Э. Невиль (E. H. Neville), О решении численных функциоиальных уравиеиий (On the solution of numerical functional equations), Proc. London Math. Soc., (2) **14**, 1915, стр. 308—326.

115. С. Кравитц (S. Kravitz), Упаковка цилиидров в цилиндрических контейиерах (Packing cylinders into cylindrical containers), Math. Magazine, **40**, 1967, стр. 65—71.

116. К. Цан (C. T. Zahn, Jr.), Максимизация расположений кругов методом «черного ящика» (Black Box Maximization of Circular Coverage), Journ. of Research Nat. Bureau of Standarts — B. Math. and Math. Physics, **66B**, № 4, 1962, стр. 181—214.

117. И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными, Известия Молдавского филиала АН СССР, № 10(76), 1960, стр. 87—90.

118. Ф. Леви (F. W. Lewi), Одна геометрическая задача о покрытиях (Eine geometrisches Überdeckungsproblem), Archiv der Math., **5**, 1954, стр. 476—478; Покрытие выпуклой области параллельным сдвигом ее открытого ядра (Überdeckung eines

Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns), там же, **6**, 1955, стр. 369—370.

119. Г. Хадвигер, Нерешенная задача № 20 (Ungelöste Probleme Nr. 20), Elemente der Math., **12**, 1957, стр. 121.

120. П. С. Солтан, О покрытии выпуклых тел гомотетичными, Fundamenta math., **76**, 1972, стр. 85—93.

121. Т. Банг (Th. Bang), О покрытии параллельными полосами (On covering by parallel-strips), Math. Tidsskr., сер. B, **13**, 1950, стр. 49—53; Решение «проблемы дощечек» (A solution of the «plank problem»), Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 1951, стр. 990—993.

122. Т. Банг, Несколько замечаний об объединении выпуклых тел (Some remarks on the union on convex bodis), **12** Scand. Math. Kongr., Lund., 1953; Lund, 1954, стр. 5—11; В. Фенхель, Решение Банга проблемы дощечек (On the Bang's solution of the plank problem), Math. Tidsskr., сер. B, **14**, 1951, стр. 49—56; Д. Оман (D. Ohmann), Краткое доказательство одной оценки для ширины при покрытии выпуклыми телами (Kurzer Beweis einer Abschätzung für die Breite bei Überdeckung durch konvexe Körper, Archiv der Math., **8**, 1957, стр. 150—152; Н. Богнар (N. Bognár), О принадлежащем В. Фенхелю решении проблемы дощечек (On W. Fenchel's solution of the plank problem), Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **12**, 1961, стр. 269—270.

123. И. М. Яглом, Т. Банг — В. Фенхель: Решение одной задачи о покрытии выпуклых фигур, Математическое просвещение (новая серия), вып. I, М., Гостехиздат, 1957, стр. 214—218; Д. Оман: Решение проблемы Банга о покрытии выпуклых фигур, там же, вып. 4, М., Физматгиз, 1959, стр. 239—241.

124. Дж. Шаер, А. Меир (J. Schaer), Об одной геометрической экстремальной проблеме (On a geometric extremum problem), Canad. Math. Bulleten, **8**, 1965, стр. 21—27; Дж. Шаер, Плотнейшая упаковка 9 кругов в квадрате (The densest packing of 9 circles in a square), там же, **9**, 1966, стр. 273—277.

125. Дж. Шаер, О плотнейшей упаковке шаров в кубе (On the densest packing of spheres in a cube), Canad. Math. Bull., **9**, 1966, стр. 265—270; О плотнейшей упаковке пяти шаров в кубе (On the densest packing of five spheres in a cube), там же, стр. 271—274; Плотнейшая упаковка шести шаров в кубе (The densest packing of sixe spheres in a cube), там же, стр. 275—280.

126. М. Гольдберг, О первоначальной задаче Мальфатти (On the original Malfatti Problem), Math. Magazine **40**, № 5, 1967, стр. 241—247; Х. Габай, Э. Либман (H. Gabai, E. Libman), О неравенстве Гольдберга, связанном с задачей Мальфатти (On Goldberg's inequality associated with the Malfatti problem), там же, **41**, № 5, 1968, стр. 251—252.

127. М. Гольдберг, Обратная задача Мальфатти (The converse Malfatti problem), Math. Magazine, **41**, № 5, 1968, стр. 262—266.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Докажите, что если XY — произвольный отрезок, проходящий через M (где X и Y — точки сторон $\triangle ABC$), а K — не принадлежащая ему точка, то наибольшим из всех отрезков KL, где $L \in XY$, является либо отрезок KX, либо отрезок KY.

2. Проведите через середину M_1 отрезка A_1B_1 отрезки $M_1A' \# A_1A$ и $M_1B' \# B_1B$; воспользуйтесь тем, что медиана треугольника всегда не больше полусуммы тех двух сторон, которые она не делит пополам.

Равенства $MM_1 = \frac{1}{2}|AA_1 \pm BB_1|$ имеют место, лишь если $AA_1 \parallel BB_1$.

3. а) Четырехугольник $ABCD$ может быть: 1) плоским, выпуклым; 2) плоским, невыпуклым; 3) плоским, самопересекающимся; 4) неплоским. Докажите, что во всех случаях $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leqslant 360°$.

б) Если отрезки AC и BD пересекаются, то четырехугольник $ABCD$ выпуклый.

в) Если «диагонали» AC и BD плоского четырехугольника $ABCD$ не пересекаются, то этот четырехугольник невыпуклый или самопересекающийся; рассмотрите отдельно оба случая.

4. Воспользуйтесь методом доказательства от противного. Если четырехугольник $ABCD$ не выпуклый, то утверждение задачи может оказаться неверным.

5. а) Отразите точку M симметрично от общей середины отрезков AD и BC.

б) Примите за точку M плоскости точки A и D.

6. а) Наибольшее расстояние между точками окружностей равно $d + r_1 + r_2$, а наименьшее — или $d - r_1 - r_2$, или $r_1 - d - r_2$, или 0.

б) Наибольшее расстояние не меняется от замены окружностей кругами, а наименьшее обращается в нуль или сохраняет то же значение, что и раньше.

7. а) $\rho(T_1, T_2) = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $\rho(T_2, T_1) = \frac{\sqrt{3}}{3} (= 2\rho(T_1, T_2))$.

б) $\rho(K_1, K_2) = \frac{1}{2}$; $\rho(K_2, K_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. а) Воспользуйтесь определениями величин $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$, $\rho(\Phi_2, \Phi_3)$, $\rho(\Phi_1, \Phi_3)$ и тем, что для любых трех точек A, B и C всегда $AC \leqslant AB + BC$.

б) Может.

9. а) Воспользуйтесь тем, что если точка A удалена от центра окружности S радиуса r на расстояние d, то наименьшее расстояние $\rho(A, S)$ от A до окружности S равно $|d-r|$. Далее рассмотрите отдельно разные случаи взаимного расположения окружностей S_1 и S_2.

б) Всегда $P(K_1, K_2) = P(S_1, S_2)$, но возможно $\rho(K_1, K_2) \neq \rho(S_1, S_2)$.

в) Воспользуйтесь определением величины $P(\Phi_1, \Phi_2)$ и результатом задачи 8 а).

10. Воспользуйтесь тем, что фигурирующий в условии задачи отрезок AB равен радиусу наибольшего круга с центром A, целиком заключающегося внутри кляксы, а отрезок AC — радиусу наименьшего круга с центром A, содержащего кляксу внутри себя.

11. Воспользуйтесь тем, что если MA, MB и MC — расстояния от произвольной точки плоскости до вершин равностороннего треугольника ABC, то всегда $AM + BM \geqslant CM \geqslant |AM - BM|$.

12. Воспользуйтесь тем, что если M_1 и M_2 — две диаметрально противоположные точки рассматриваемой окружности, то $M_1A_i + M_2A_i \geqslant 2$ (где $i = 1, 2, 3, \ldots, 1000$).

13. В задаче требуется доказать, что расстояние от точки A_0 до любой из вершин ломаной не превосходит 3. Пусть A_k — какая-то вершина ломаной ($k = 2, 3, 4, \ldots, n-1$ или n). Обозначим через $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ окружности, описанные вокруг треугольников $A_0A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $\ldots$, $A_{k-2}A_{k-1}A_k$; пусть $O_1, O_2, \ldots, O_{k-1}$ — центры этих окружностей. В таком случае

$$A_0A_k \leqslant A_0O_1 + (O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1}) + O_{k-1}A_k,$$

так что остается оценить отрезки A_0O_1 и $O_{k-1}A_k$ и ломаную $O_1O_2O_3 \ldots O_{k-1}$.

Покажите, что $A_0O_1 \leqslant 1$, $A_kO_{k-1} \leqslant 1$ и что

$$O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_4 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1} \leqslant \frac{1}{2}(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Для доказательства последнего неравенства рассмотрите наряду с окружностями $C_2, C_3, \ldots, C_{k-1}$ еще и равные предыдущим окружности $C'_2, C'_3, \ldots, C'_{k-1}$, проходящие через точки A_0 и A_1.

14. Искомым будет квадрат AA_1BB_1, диагональю которого является отрезок AB; сумма расстояний от A до его вершин равна $(1+\sqrt{2})\,d$.

15. Докажите, что если $OA_1 = x$, $A_2A_3 = y$, $OB = z$ и если C и D — точки пересечения продолжения A_2A_3 с l_4, соответственно — продолжения BA_4 с A_2C, то $A_2C = x$, $A_3C = x - y$ и $A_3D = z$; далее установите, что $xz = y(x-y)$.

а) Воспользуйтесь тем, что $y(x-y) < \frac{1}{2}x^2$.

б) Воспользуйтесь тем, что $y(x-y) \leqslant \frac{1}{4}x^2$. Неравенство задачи б) улучшено быть не может.

16. Воспользуйтесь теоремой о величине вписанного (в окружность) угла.

17. Рассмотрите самую близкую к точке M из всех диагоналей и сторон правильного n-угольника.

18. а) *Постройте* $\triangle ABC$ с заданным острым углом α, такой, что его биссектриса AD, высота CH и медиана BM пересекаются в одной точке Q, и докажите, что если $\alpha < 45°$, то $\angle ACB = \gamma$ тупой.

б) Докажите, что при увеличении угла α отвечающий α угол $ACB = \gamma$ (см. указание к решению задачи а)) монотонно *убывает*, в силу чего достаточно определить такой угол α_0, которому отвечает угол $\gamma_0 = 90°$; докажите, что $\cos^2\alpha_0 + \cos\alpha_0 - 1 = 0$, т. е. $\cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ответ. $90° > \alpha > \alpha_0$ ($\approx 51°50'$).

19. Если AC_1 — диагональ куба, α — точка его поверхности, то $90° \leqslant \angle AMC_1 \leqslant \alpha$, где угол α определяется равенством $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (так что $\alpha \approx 144°44'08''$).

20. Наименьший возможный угол равен

$$\begin{array}{lll} \arccos\left(1 - \dfrac{1}{2R^2}\right), & \text{если} & R \geqslant r \geqslant R - \dfrac{1}{R}; \\ \arccos\dfrac{R^2 + r^2 - 1}{2Rr}, & \text{если} & R - \dfrac{1}{R} \geqslant r \geqslant R - 1; \\ 0, & \text{если} & R - 1 \geqslant r. \end{array}$$

21. Наибольшее возможное значение рассматриваемой суммы углов равно $k \cdot 180°$ при $n = 2k$ *четном* и $(k^2 + k) \cdot 180°$ при $n = 2k + 1$ *нечетном*; оно достигается для k пар противоположно направленных лучей или для k таких пар лучей и еще одного произвольно направленного луча.

22. Пусть OX_{i-1}, OX_i, OX_{i+1} — какие-то три последовательных луча из числа рассматриваемых нами, и пусть $x_i \neq x_{i+1}$. Поменяйте местами отрезки x_i и x_{i+1} (новые лучи — OX_{i-1}, OX_i', OX_{i+1}'); докажите, что если $x_i < x_{i+1}$, то $\angle X_{i-1}OX_{i+1} > \angle X_{i-1}OX_{i+1}'$.

23. Перенесите параллельно все рассматриваемые прямые так, чтобы они проходили через фиксированную точку O.

24. Воспользуйтесь формулой для суммы *внешних* углов выпуклого многоугольника.

25. Рассмотрите выпуклую оболочку T всех точек, т. е. *наименьший выпуклый многоугольник, такой, что все рассматриваемые точки расположены внутри него или на его границе.*

а — в) Если T содержит внутри хоть одну из наших точек, то существует треугольник с вершинами в трех из наших точек и точка внутри него; оцените части углов $\triangle ABC$, на которые их делят прямые DA, DB и DC (где D лежит внутри $\triangle ABC$). Если все точки расположены в вершинах T, то воспользуйтесь формулой для суммы углов многоугольника.

г) Предположите, что точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ пронумерованы таким образом, что $\angle M_nM_1M_2$ — угол выпуклого m-угольника T (где $m \leqslant n$) и что лучи M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, ..., M_1M_n следуют друг за другом именно в этом порядке; далее воспользуйтесь тем, что если N — точка на продолжении луча M_1N за точку M_1, то

$$180° = \angle NM_1M_n = \angle NM_1M_2 + \angle M_2M_1M_3 + \angle M_3M_1M_4 + \ldots + \angle M_{n-1}M_1M_n.$$

Для того чтобы ни один из треугольников $M_iM_jM_k$ не имел меньшего $\frac{180^\circ}{n}$ угла, n точек должны располагаться в вершинах *правильного n-угольника.*

26. Если выпуклая оболочка T наших точек содержит в н у т р и хоть одну из них, то достаточно воспользоваться оценкой для внутренних углов ADB, BDC и CDA, где точка D лежит внутри $\triangle ABC$; в противном случае воспользуйтесь формулой для суммы углов многоугольника.

Ни один из треугольников с вершинами в наших точках не содержит угла, большего 90°, соответственно 108° и 120°, лишь в том случае, если точки являются вершинами *равноугольного* многоугольника (*прямоугольника* в случае четырех точек).

27. а) Воспользуйтесь результатом задачи 26 в).

б), в) Рассмотрите (скажем, центрально-симметричный) равноугольный шестиугольник $ABCDEF$, где $AB \ll FA \ll EF$ (знак $\ll$ означает «много меньше») и точки G, H на биссектрисах углов F и C шестиугольника, расположенные на одинаковом и очень малом расстоянии от вершин F и C.

28. а) Если выпуклая оболочка T наших точек — отрезок, то $\alpha_2 = 0$; если она треугольник, то $\alpha_2 < 45^\circ$. Если $T \equiv ABCD$ — четырехугольник, то вычислите суммы углов $\angle ABD + \angle BDA + \angle DAC + \angle BAC$ и $\angle CBD + \angle BDC + \angle BCA + \angle DCA$.

б) Если выпуклая оболочка T наших четырех точек — отрезок, то $\beta_2 = 180^\circ$; если T — треугольник, то $\beta_2 \geqslant 90^\circ$. Если $T \equiv ABCD$ и D — самый большой из углов T, то вычислите сумму $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDB + \angle BDA$.

29. Рассмотрите случай n точек одной прямой.

30. Воспользуйтесь результатом задачи, разобранной на стр. 22—23. Значения $A = 60^\circ$ и $B = 60^\circ$ реализуются для четырех вершин правильного тетраэдра.

31. а) При $n = 3$ или 4.

б) При $n \leqslant 8$. Рассмотрите в ы п у к л у ю о б о л о ч к у Т всех рассматриваемых точек, т. е. *н а и м е н ь ш и й многогранник, содержащий внутри (и на границе) все наши точки*; докажите, что в рассматриваемом случае ни одна из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ не может лежать в н у т р и Т — все они являются *вершинами* Т. Далее рассмотрите многогранники $T_2, T_3, \ldots, T_n$, получаемые из Т параллельными переносами на векторы $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \ldots, \overline{M_1M_n}$, и докажите, что никакие два из многогранников $T_1 \equiv T, T_2, T_3, \ldots, T_n$ не пересекаются и что все они заключены внутри вдвое большего (по линейным размерам) многогранника Σ с вершинами $M_1, M_2', M_3', \ldots, M_n'$, где M_i' получается из M_1 переносом на вектор $2\overline{M_1M_i}$. Из сравнения объемов многогранников Т и Σ и вытекает требуемый результат.

32. а) Только при $n = 3$.

б) При $n \leqslant 5$. Нетрудно найти примеры многогранников с четырьмя вершинами (треугольная пирамида, или *тетраэдр*) и с пятью вершинами, все грани которых являются остроугольными треугольниками; при этом в случае $n = 5$ можно установить (здесь может помочь, например, т е о р е м а Э й л е р а, связывающая число вершин, число ребер и число граней выпуклого многогранника — см. книги [2], [3], [8], [23] или задачу 48 книги: Д. О. Ш к л я р с к и й, Н. Н. Ч е н ц о в и И. М. Я г л о м, Избранные задачи и теоремы

элементарной математики, ч. 3, Геометрия (стереометрия), М., Гостехиздат, 1954), что в этом случае многогранник $T \equiv M_1M_2M_3M_4M_5$ обязательно должен представлять собой «треугольную бипирамиду» (или *битетраэдр*), полученную из двух тетраэдров $M_1M_2M_3M_4$ и $M_1M_2M_3M_5$, сложенных общим основанием $M_1M_2M_3$.

Далее (сделать это можно, например, с помощью векторной алгебры) установите, что *для такого битетраэдра $M_1M_2M_3M_4M_5$ с шестью остроугольными гранями обязательно*

$$M_4M_2^2 + M_4M_3^2 < M_1M_2^2 + M_1M_3^2. \qquad (*)$$

Предположите, наконец, что существуют шесть точек, удовлетворяющих условию задачи; в таком случае они должны являться вершинами «выпуклого 6-вершинника» T, ограниченного некоторым числом остроугольных треугольников. С помощью теоремы Эйлера (см. выше) можно установить, что искомый 6-вершинник T может являться либо «четырехугольной бипирамидой» $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$, образованной двумя четырехугольными пирамидами $M_1M_2M_3M_4M_5$ и $M_1M_2M_3M_4M_6$, сложенными общим основанием $M_1M_2M_3M_4$, либо «искривленной пятиугольной пирамидой», в которой «вершина» M_6 соединена со всеми вершинами «сломанного 5-угольного основания» $M_1M_2M_3M_4M_5$, «сложенного» из трех треугольников $M_1M_2M_3$, $M_1M_3M_4$ и $M_1M_4M_5$, расположенных в разных плоскостях. Но в обоих случаях можно прийти к противоречию, используя то, что каждые пять из наших точек являются вершинами битетраэдра, для которого выполняются соотношения типа (*); этим доказывается, что случай $n = 6$ (или $n > 6$) является невозможным.

33. а) При $n = 3$ или 4.

б) Также лишь при $n = 4$. Воспользуйтесь тем, что если M_1 и M_2 — две самые далекие друг от друга из наших точек, а M_3 и M_4 — две самые далекие из оставшихся точек, то все точки принадлежат сфере Σ с диаметром M_1M_2 и все точки, кроме, быть может, лишь точек M_1 и M_2, — сфере σ с диаметром M_3M_4, (т. е. все они принадлежат пересечению сфер Σ и σ); далее рассмотрите отдельно случаи, когда сферы Σ и σ совпадают и когда они различны.

34. При любом; для доказательства воспользуйтесь, например, методом математической индукции.

35. 4. Для доказательства удобно воспользоваться тем, что *если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и все его плоские углы — острые.*

36. а) Воспользуйтесь теоремой о сумме плоских углов трехгранного угла.

б) Воспользуйтесь результатом задачи 120 а) (для $n = 4$).

в) Воспользуйтесь результатом задачи 35.

37. Докажите, что каждый вписанный в M треугольник XYZ по площади не больше по крайней мере одного треугольника PYZ, вершина P которого совпадает с вершиной M.

38. а) Воспользуйтесь тем, что площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения сторон, заключающих этот угол, и методом доказательства от противного.

б) Рассмотрите отдельно случай, когда все стороны треугольника PQR пересекают соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$, образованного *средними линиями* треугольника ABC, и

случай, когда у этих треугольников есть пара непересекающихся соответственных сторон.

39. Воспользуйтесь тем, что площади треугольников, имеющих равные углы, относятся как произведения длин сторон, заключающих эти углы, и тем, что сумма квадратов двух (положительных) чисел не превосходит их удвоенного произведения, а сумма кубов трех (положительных) чисел — их утроенного произведения.

Улучшена оценка задачи быть не может (опровергающий пример: *равносторонний* треугольник).

40. Докажите, что хоть один треугольник, основанием которого является сторона шестиугольника, а вершина принадлежит диагонали, соединяющей две вершины шестиугольника, ближайшие к основанию рассматриваемого треугольника, имеет площадь $\leqslant \frac{1}{6} S$.

Улучшено неравенство задачи быть не может (опровергающий пример — *правильный* шестиугольник).

41. Проведите через вершины A, C и E шестиугольника прямые, соответственно параллельные $BC \parallel EF$, $AB \parallel DE$ и $AF \parallel CD$, и рассмотрите образовавшиеся параллелограммы.

Равенство $S_{ACE} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$ имеет место для шестиугольников, противоположные стороны которых параллельны и *равны.*

42. а) Неравенство $s > \frac{1}{2} S$ можно вывести из рассмотрения отрезаемых диагоналями пятиугольника Π треугольников, для которых стороны пятиугольника n являются средними линиями; для того чтобы убедиться, что это неравенство нельзя улучшить, достаточно предположить, что вершины D и E пятиугольника $\Pi \equiv ABCDE$ слились с C.

Для того чтобы доказать, что неравенство $s < \frac{3}{4} S$ (если только оно справедливо) нельзя улучшить, достаточно предположить, что вершины E и C сливаются, соответственно с A и с B; при этом Π обращается в треугольник ABD. Для того же, чтобы доказать справедливость неравенства $s < \frac{3}{4} S$, достаточно рассмотреть, как меняется площадь «малого» пятиугольника n при такой деформации основного пятиугольника Π, не меняющей площади Π, при которой Π обращается в $\triangle ABD$ (эту деформацию приходится проводить в несколько этапов).

б) Возможность равенства $s = 0$ является очевидной; равенство $s = \frac{1}{4} S$ осуществляется для «вырожденного» шестиугольника $Ш \equiv ABCDEF$, вершины B, D и F которого совпадают, соответственно с A, с C и с E. Далее рассмотрите, как меняется s при (многостепенной) деформации шестиугольника $Ш$, не меняющей его площади и переводящей $Ш$ в $\triangle ABC$, для которого $s = {}^1/_4 S$.

43. Равенство $s = 0$, очевидно, возможно. Для доказательства неравенства $s < \frac{4}{27} S$ воспользуйтесь тем, что вершина T *параллелограмма $PQRT$* принадлежит диагонали AC четырехугольника; используйте также неравенство $xyz \leqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$, имеющее место для

любых положительных x, y, z. Равенство $s = \frac{4}{27} S$ отвечает случаю принадлежности A, B и D одной прямой и тому, что $AT : AC = 2 : 3$.

44. Воспользуйтесь неравенством

$$(AX + BY)^2 \leqslant (A^2 + B^2)(X^2 + Y^2),$$

справедливым для любых положительных A, B, X, Y.

Равенство в задаче а) имеет место в случае *равенства* треугольников T_1 и T_2, а в задаче б) — в случае их *подобия*.

45. а) Воспользуйтесь формулой: $S = \frac{1}{2} ef \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями четырехугольника.

б) Примените результат задачи а) к параллелограмму, вершины которого совпадают с серединами последовательных сторон четырехугольника.

в) Воспользуйтесь тем, что длина средней линии (выпуклого) четырехугольника не превосходит полусуммы длин сторон, которые эта средняя линия не пересекает (ср. также указание к решению задачи б)).

46. а) Из условий задачи следует, что M заключен внутри (4×5)-прямоугольника P, стороны которого параллельны осям координат, и внутри наклоненного к нему под углом 45° $(3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2})$-прямоугольника p; найдите, когда площадь пересечения Q прямоугольников P и p будет наибольшей.

б) Рассмотрите пересечение Q фигурирующих в решении задачи а) прямоугольников P и p; найдите, при каких условиях будет *наименьшей* площадь вписанного в это пересечение (может быть, вырожденного!) восьмиугольника q, имеющего вершины на всех сторонах Q.

47. Полосы должны иметь общий центр симметрии (ср. с решением задачи 46 а)).

48. Достройте четыре прямоугольных треугольника, отсекаемых от прямоугольника $ABCD$ равным ему прямоугольником $A_1B_1C_1D_1$ до прямоугольников и докажите, что эти прямоугольники не будут иметь общих точек.

49. Заключите «плот» F в наименьший возможный прямоугольник P, ограниченный берегами канала и двумя перпендикулярными каналу отрезками; рассмотрите, как будет двигаться этот прямоугольник (который считается жестко скрепленным с плотом) при движении F, и докажите, что если площадь «плота» $\geqslant 2\sqrt{2}$, то в какой-то момент F (а с ним и P) повернется на угол 45°. Рассмотрите, какое положение может занимать в этот момент P, и выведите отсюда противоречие с предположением $S_P \geqslant 2\sqrt{2}$.

50. Рассмотрите последовательно случаи: когда сечение проходит через ребро тетраэдра; когда оно проходит через вершину тетраэдра; общий случай.

51. а) Рассмотрите отдельно случаи, когда проекция является треугольником и когда она представляет собой четырехугольник; воспользуйтесь тем, что диагонали четырехугольника являются проекциями ребер тетраэдра. Ответ. Наибольшая по площади проекция правильного тетраэдра представляет собой *квадрат*.

б) В общем случае проекция куба представляет собой (центрально-симметричный) шестиугольник, составленный из трех параллелограммов — проекций граней куба; воспользуйтесь равенством площадей граней куба и неравенством $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Ответ. Наибольшая по площади проекция куба представляет собой *правильный шестиугольник*.

52. а) Наибольший центрально-симметричный многоугольник m, заключающийся в данном треугольнике T и имеющий данный центр O, представляет собой пересечение T и треугольника T_1, симметричного T относительно точки O; поэтому задача сводится к тому, чтобы найти точку O, для которой пересечение треугольников T и T_1 имеет наибольшую возможную площадь. Ответ. Точка O должна совпасть с *точкой пересечения медиан* треугольника T; площадь m равна $\frac{2}{3}$ площади T.

б) Наименьший выпуклый центрально-симметричный многоугольник M, содержащий внутри себя данный треугольник T и имеющий центр в данной точке O, совпадает с выпуклой оболочкой (ср. с решением задачи 25) точек A, B, C, A_1, B_1, C_1, где $\triangle A_1B_1C_1 \equiv T_1$ симметричен $\triangle ABC \equiv T$ относительно точки O; таким образом, задача сводится к выбору такой точки O, чтобы эта выпуклая оболочка была возможно меньшей по площади. Ответ: Площадь M равна удвоенной площади T.

53. Искомая точка совпадает с точкой M *пересечения медиан* треугольника T; пределы, в которых заключается отношение k частей T, на которые делит T проходящая через M прямая, таковы: $\frac{5}{4} \geqslant k \geqslant \frac{4}{5}$.

54. а) Наряду с основной фигурой Φ (которая может и состоять из нескольких отдельных кусков) рассмотрите также фигуры Φ' и Φ'', получаемые из Φ параллельными переносами на расстояние 0,001 в направлении одной из сторон содержащего Φ квадрата и в направлении, образующем угол 60° с направлением первого переноса; докажите, что никакие две из фигур Φ, Φ' и Φ'' не пересекаются.

б) Пусть OM_1M_2 — равнобедренный треугольник со сторонами $OM_1 = 0{,}001 \cdot \sqrt{3}$, $OM_2 = 0{,}001 \cdot \sqrt{3}$ и $M_1M_2 = 0{,}001$; рассмотрите фигуры Φ_1 и Φ_2, полученные из основной фигуры Φ площади s параллельными переносами на векторы $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$. Пусть Φ_1 — та из этих фигур, площадь пересечения которой с Φ не превосходит $\frac{1}{2}$ (любая из фигур Φ_1 и Φ_2, если обе они удовлетворяют этому условию), и пусть отрезок OM_1, отвечающий вектору $\overline{OM_1}$ параллельного переноса, переводящего Φ в Φ_1, направлен по биссектрисе угла между векторами фигурирующих в решении задачи а) переносов (переводящих Φ в Φ' и в Φ''). Из рассмотрения совокупности четырех фигур Φ, Φ_1 и Φ', Φ'' можно вывести, что $s < 0.287$.

55. а) Первое решение. Пусть стороны рассматриваемых квадратов равны a_1, a_2, a_3, ..., a_n, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{n_1}$. Требуемое вложение всех квадратов в квадрат K можно осуществить так: сначала вкладываем, вплотную друг к другу, квадраты

со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ прикладывая их один за другим к «нижней» стороне K до тех пор, пока это остается еще возможно; затем, отрезав от K полоску ширины a_1, содержащую все уложенные до сих пор квадраты, мы укладываем аналогичным способом последующие квадраты, начиная с (n_1+1)-го, прикладывая их к нижней стороне оставшейся части K, и т. д.

Второе решение. Методом математической индукции (индукция по числу квадратов!) можно доказать следующее, более общее, чем нам требуется, предложение: *если сумма площадей n квадратов не превосходит $1/2$ площади прямоугольника P со сторонами a и b и сторона наибольшего квадрата не превосходит меньшей стороны прямоугольника P, то все квадраты можно без наложений уложить в прямоугольник P.*

б) Докажите, что *если два квадрата со сторонами m и n можно без наложений расположить в квадрате со стороной a, то $m+n \leqslant a$*; отсюда, в частности, будет следовать, что два квадрата со стороной $1/2$ нельзя без наложений расположить в квадрате, сторона которого < 1. Для доказательства выделенного курсивом предложения предположите, что квадраты со сторонами m и n вместились в квадрат K со стороной a; сдвиньте их к противоположным углам K.

56. а) Исключите из рассмотрения все отрезки покрытия, которые полностью покрываются другими отрезками покрытия; затем перенумеруйте все оставшиеся отрезки в естественном порядке и рассмотрите отдельно «четные» и «нечетные» отрезки.

б) Отбросьте все квадраты покрытия, пересекающиеся с самым большим из этих квадратов; с оставшимися квадратами поступайте аналогично.

57. а) Докажите, что выпуклую оболочку расположенных внутри квадрата точек (т. е. наименьший выпуклый многоугольник, содержащий внутри и на границе все эти точки) можно разбить на треугольники с вершинами в наших точках; оцените, каким может быть число этих треугольников.

б) Спроектируйте все точки на одну сторону заключающего их квадрата; воспользуйтесь результатом задачи 61 б).

58. Оцените площадь объединения девяти рассматриваемых многоугольников.

59. Воспользуйтесь тем, что (в указанных на стр. 51 обозначениях)

$$\sum M_i - \sum M_{ij} + \sum M_{ijk} - \sum M_{ijkl} + M_{12345} = S, \qquad (1)$$

где S — площадь всей покрытой заплатами части кафтана, $\sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$ — сумма площадей всех заплат, $\sum M_{ij} = M_{12} + M_{13} + M_{14} + \ldots + M_{45}$ — сумма всех попарных пересечений заплат, и т. д.; вытекающим из (1) неравенством

$$M - \sum M_i + \sum M_{ij} - \sum M_{ijk} + \sum M_{ijkl} - M_{12345} \geqslant 0, \qquad (2)$$

а также родственным (2) неравенством

$$\sum M_i - 2\sum M_{ij} + 3\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 5M_{12345} \geqslant 0, \qquad (3)$$

получаемым комбинированием неравенств типа (2), примененным к отдельным заплатам M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 (где, например, «кафтан» M_1 покрыт «заплатами» M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15}).

60. а) Первое решение. Воспользуйтесь неравенством (ср. с указанием к задаче 59)

$$M-\sum M_i+\sum M_{i_1i_2}-\sum M_{i_1i_2i_3}+\ldots+(-1)^r\sum M_{i_1i_2\ldots i_r}+\ldots$$
$$\ldots(-1)^n M_{123\ldots n}\geqslant 0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

(доказать его можно, например, по индукции) и неравенствами, получаемыми комбинированием неравенств этого типа, примененных к «заплатам» M_i, к их парным пересечениям $M_{i_1i_2}$, к их тройным пересечениям $M_{i_1i_2i_3}$, и т. д:

$$\sum M_i-2\sum M_{i_1i_2}+3\sum M_{i_1i_2i_3}-4\sum M_{i_1i_2i_3i_4}+\ \ldots$$
$$\ldots\ +(-1)^{r-1}r\sum M_{i_1i_2\ldots i_r}+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}nM_{12\ldots n}\geqslant 0;$$

$$\sum M_{i_1i_2}-3\sum M_{i_1i_2i_3}+6\sum M_{i_1i_2i_3i_4}-\ \ldots$$
$$\ldots\ +(-1)^{r-2}C_r^2\sum M_{i_1i_2\ldots i_r}+\ \ldots\ +(-1)^{n-2}C_n^2M_{12\ldots n}\geqslant 0;$$

$$\sum M_{i_1i_2i_3}-4\sum M_{i_1i_2i_3i_4}+\ \ldots$$
$$\ldots\ +(-1)^{r-3}C_r^3\sum M_{i_1i_2\ldots i_r}+\ \ldots\ +(-1)^{n-3}C_n^3M_{12\ldots n}\geqslant 0;$$

. . . .

. . . .

Далее надо найти такую комбинацию выписанных неравенств, в которой отсутствовали бы члены с $\sum M_{i_1i_2i_3}$ с $\sum M_{i_1i_2i_3i_4}$, и т. д., вплоть до члена с $\sum M_{i_1i_2\ldots i_r}$.

Второе решение. Обозначим площадь квадрата («кафтана») M, покрытую многоугольниками $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n$ («заплатами») *в точности k-кратно*, через x_k; совокупность $n+1$ неотрицательных чисел $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ можно назвать ***характеристикой*** данной системы $\mathfrak{R}$ многоугольников M_i. Покажите, что каждая система $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ из $n+1$ неотрицательных чисел, где

$$x_0+x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n=1$$

и

$$n\geqslant 0\cdot x_0+1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ \ldots\ +n\cdot x_n\geqslant n\alpha,$$

служит характеристикой некоторой системы многоугольников.

Нам надо найти систему многоугольников (и отвечающую ей характеристику), для которой достигает наименьшего значения величина $\max M_{i_1i_2}$. Докажите, что для данной характеристики $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ минимум $\max M_{i_1i_2}$ достигается в случае *одинаковых* площадей всех k-кратных пересечений $M_{i_1i_2\ldots i_k}$ многоугольников M_i (где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), а в случае переменной характеристики — для характеристик $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, в которой *отличны от нуля лишь два соседних числа или одно число* (для чего надо убедиться, что в противном случае характеристику можно изменить с тем, чтобы величина $\max M_{i_1i_2}$ увеличилась).

б) См. указание ко второму решению задачи а).

в) Эту задачу можно решить аналогично задачам а) — б); только здесь уместно называть *характеристикой* системы $\mathfrak{R}$ многоугольников M_i совокупность $n-h+2$ чисел $(x_{h-1}, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_n)$ (которые имеют тот же смысл, что и выше); при этом выписанные в указании ко второму решению задачи а) условия здесь заменяются следующими:

$$x_{h-1}+x_h+\ldots+x_n\leqslant 1;$$

$$C_n^h\geqslant 0\cdot x_{h-1}+C_h^h x_h+C_{h+1}^h x_{h+1}+\ldots+C_n^h x_n\geqslant C_n^h a.$$

61. а) Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника M площади 1, C — точка (или одна из точек) многоугольника M, наиболее удаленная от AB. Докажите, что M можно заключить в параллелограмм площади $\geqslant 2$, одна сторона которого содержит сторону AB многоугольника, а две соседние с ней стороны параллельны AC.

б) Рассмотрите содержащий $\triangle ABC$ площади 1 параллелограмм $APQR$, вершина A которого совпадает с вершиной треугольника, а стороны PQ и QR проходят через вершины B и C; докажите, что площадь этого параллелограмма $\geqslant 2$.

62. а) Впишите в данный многоугольник M площади 1 треугольник ABC *наибольшей возможной площади* (ср. с задачей 37) и рассмотрите отдельно случаи, когда площадь $\triangle ABC$ не превосходит 1/2 и когда она превосходит 1/2.

б) Прежде всего докажите, что квадрат со стороной 1 нельзя заключить в треугольник площади <2. Затем последовательно покажите, что прямоугольник площади 1 нельзя заключить в треугольник площади <2 и что параллелограмм площади 1 нельзя заключить в треугольник площади <2; при этом используйте то, что отношение площадей фигур сохраняется при ортогональном проектировании.

63. а) Пусть прямая l не пересекает многоугольник M, A — самая близкая к l вершина M (или одна из самых близких вершин), B — вершина M, наиболее удаленная от l. Далее пусть l_1', l_0, l_2' — параллельные l прямые, делящие отрезок AB на 4 равные части; прямая l_1' (более близкая к A) пересекает контур M в точках P и Q, а прямая l_2' — в точках R и T. Докажите, что площадь хоть одного из треугольников ART и BPQ не меньше 3/8 площади M.

б) Найдите вписанный в *правильный шестиугольник* треугольник наибольшей возможной площади, одна сторона которого параллельна заданной стороне шестиугольника.

64. Воспользуйтесь тем, что $A_1'A_2'$ — средняя линия $\triangle A_1A_2A_3$; $A_2'A_3'$ — средняя линия $\triangle A_2A_3A_4$, и т. д. При $n>3$ результат задачи а) можно усилить так: $P>P'>\frac{1}{2}P$, причем эти неравенства далее усилить нельзя; при $n>4$ результат задачи б) может быть усилен так: $S>S'>\frac{1}{2}S$, причем при $n>5$ эти неравенства усилить нельзя; относительно случая $n=5$ см. задачу 42 а).

65. Неравенства задачи равносильны следующим:

а) $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant$
$$\leqslant \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} + \ldots + \sin\frac{\alpha_n+\alpha_1}{2}$$
и

б) $\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \ldots + \sin 2\alpha_n \leqslant$
$$\leqslant \sin(\alpha_1+\alpha_2) + \sin(\alpha_2+\alpha_3) + \ldots + \sin(\alpha_n+\alpha_1),$$
где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 90°$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180°$.

66. Воспользуйтесь тем, что если AB и CD — две хорды одной окружности S с центром O и $\smile AB < \smile CD < 180°$, то
$$\frac{AB}{CD} > \frac{\smile AB}{\smile CD} \quad \text{и} \quad \frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} > \frac{\smile AB}{\smile CD}.$$

67. а) Воспользуйтесь методом математической индукции (по числу звеньев ломаной).

б) Равнобедренный треугольник со стороной a (он будет даже равносторонним).

68. Постройте на каждой стороне M обращенный внутрь M прямоугольник ширины $\frac{S}{P}$.

69. Первое решение. Преобразуйте четырехугольник подобно с коэффициентом подобия $k = \frac{c}{a}$ и приложите к исходному равными сторонами; выясните, в каком случае полученная фигура будет иметь наибольшую возможную площадь.

Второе решение. Рассмотрите два четырехугольника с одинаковыми сторонами: вписанный в окружность S с центром O четырехугольник $ABCD$ и отличный от него четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$; предположите, что шарнирный четырехугольник $ABCD$ деформируется в $A_1B_1C_1D_1$, причем треугольники OAB, OBC, OCD и ODA занимают новые положения $A_1B_1O_1$, $B_1C_1O_2$, $C_1D_1O_3$ и $D_1A_1O_4$; сравните площади четырехугольника $ABCD$ и «деформированного» четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

70. а) Первое решение. Рассмотрите два четырехугольника с одними и теми же углами и одним периметром: четырехугольник $ABCD$, описанный вокруг окружности s с центром O, и другой четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$; из O опустите перпендикуляры OK, OL, OM, ON на стороны $ABCD$ и рассмотрите «скрепленные» с четырехугольником $A_1B_1C_1D_1$ четырехугольники $A_1N_1O_1K_2 = ANOK$, $B_1K_1O_2L_2 = BKOL$, $C_1L_1O_3M_3 = CLOM$ и $D_1M_1O_4N_4 = DMON$, углы которых совпадают с углами $A_1B_1C_1D_1$; сравните площади четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Второе решение. Пусть углы A и B треугольника ABF равны двум (соседним) углам рассматриваемого четырехугольника; задача сводится к тому, чтобы пересечь $\triangle ABF$ прямой рассматриваемого направления так, чтобы у получившегося четырехугольника отношение площади к квадрату периметра было возможно большим. Сравните две секущие: касающуюся вписанной в $\triangle ABF$ окружности секущую DC и иную секущую D_1C_1.

б) Воспользуйтесь методом математической индукции (по числу сторон многоугольника; ср. с указанием ко второму решению задачи а)).

71. Если вписанный в S n-угольник M не является правильным, то у него найдется сторона, меньшая стороны вписанного в S *правильного* n-угольника M_0; можно также считать, что M имеет сторону, большую стороны M_0, и что эти две стороны M являются соседними. Докажите, что при замене соответствующих двух сторон AB и BC многоугольника M новыми сторонами AB' и $B'C$, где AB' равно стороне M_0,

а) периметр, б) площадь

n-угольника M увеличатся.

72. а) Пусть M_1 и M_0 — неправильный и правильный n-угольники, описанные вокруг одной окружности s; опишите вокруг M_0 круг K и рассмотрите *часть многоугольника M, расположенную внутри K*; докажите, что уже эта часть M по площади не меньше M_0.

б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

73. Воспользуйтесь результатами задач 71 а) и 72 а).

74. а) Воспользуйтесь формулой Герона для площади S треугольника со сторонами a, b, c и полупериметром p:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

б) Воспользуйтесь результатом задачи 69, а также следующей формулой для площади S такого четырехугольника со сторонами a, b, c, d и полупериметром p, который можно вписать в круг:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

(эту формулу можно доказать, использовав конструкцию, примененную в первом решении задачи 69).

75. Рассмотрите систему «внутренних параллельных оболочек» M_δ многоугольников M, получаемых при одновременном сдвиге всех сторон M внутрь M на одно и то же (небольшое) расстояние δ; для доказательства неравенства

$$Pr - S - sr^2 \geqslant 0,$$

где r — радиус вписанного круга многоугольника M (в смысле рис. 24, a); s — площадь описанного (в «школьном» смысле этого термина) вокруг единичной окружности многоугольника m, стороны которого параллельны сторонам M, рассмотрите соответствующую величину $P_\delta r_\delta - S_\delta - s_\delta r_\delta^2$, вычисленную для многоугольников M_δ, и выясните, как будет меняться эта величина с ростом δ.

76. Воспользуйтесь результатом задачи 75.

77. а) Ср. указание к решению задачи 75.

б) Рассмотрите «выпуклые оболочки ширины Δ» всех сторон многоугольника M (т. е. совокупности точек, ближайшее расстояние от которых до стороны A_iA_{i+1} не превосходит Δ; здесь Δ — какое-то положительное число, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем принято, что $A_{n+1} \equiv A_1$); докажите, что если $\Delta = R$, то совокупность так построенных оболочек сторон полностью покрывает «выпуклую оболочку ширины R» самого многоугольника M (совокупность точек, наименьшее расстояние до M от которых $\geqslant R$), площадь которой равна $S + PR + \pi R^2$.

78. а) Пусть A и B — две произвольные точки многоугольника M; докажите, что существуют две такие вершины многоугольника, расстояние между которыми не меньше AB.

б) Решается аналогично задаче а).

79. Воспользуйтесь тем, что площадь S выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$, где α — угол между диагоналями четырехугольника. О т в е т. $\sqrt{2} \leqslant P < \infty$.

80. Пусть AB — диаметр многогранника М; проведите через все вершины М перпендикулярные AB плоскости и оцените сумму длин частей ребер М, попавших в каждый из «слоев», на которые эти плоскости рассекают М.

81. О т в е т. $d \leqslant 2\sqrt{2} + 2$; значение $d = 2\sqrt{2} + 2$ реализуется для ветки, имеющей форму дуги окружности. Рассмотрите такое положение ветки, при котором отрезок $AB = d$ перпендикулярен биссектрисе образованного рекой угла или ср. с решением задачи 49.

82. а) Очевидно.

б) Рассмотрите отдельно случаи, когда точки являются вершинами выпуклого четырехугольника и вершинами треугольника, внутри которого заключена четвертая точка; установите, что диаметр будет наименьшим, если точки являются вершинами *квадрата.*

в) Диаметр системы точек будет наименьшим, если точки являются вершинами *правильного пятиугольника* (ср. с указанием к решению задачи б)).

83. а) Опишите вокруг каждой из точек окружность диаметра μ; оцените общую площадь всех ограниченных этими окружностями кругов.

б) См. указание к решению задачи а); воспользуйтесь результатом задачи 93 б).

84. а) При $n = 3$, 5 диаметр ломаной может р а в н я т ь с я 1; при $n = 4$ наименьшее возможное значение диаметра равно $\sqrt{2}$; при $n = 6$ диаметр не может равняться 1, но может быть с к о л ь у г о д н о б л и з о к к 1.

б) При любом нечетном $n \geqslant 3$ диаметр ломаной может р а в н я т ь с я 1; при всех четных $n \geqslant 6$ диаметр ломаной не может равняться 1, но может быть с к о л ь у г о д н о б л и з о к к 1.

85. а) Очевидно.

б) Наименьшим диаметром обладает *квадрат.*

в) Наименьшим диаметром обладает *правильный пятиугольник.*

г) Наименьшим диаметром обладает шестиугольник, углы которого попеременно равны 90° и 150°.

86. а) $0 < S \leqslant \sqrt{3}/4$ и $2 < P \leqslant 3$.

б) $0 < S \leqslant {}^1/_2$ и $2 < P < 4$.

в) Неравенства для площади остаются теми же, что и в задаче а), но для периметра P имеем: $2 < P \leqslant 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$; наибольший периметр имеет *ромбоид* (четырехугольник с двумя парами равных смежных углов) $ABCD$, у которого $AB = BC = CA = DB = 1$, $AD = DC$.

87. а) Систему n точек плоскости можно выбрать так, чтобы число ее диаметров («диаметров-отрезков») равнялось n, однако, это число не может превзойти n. Доказать последнее утверждение можно м е т о д о м м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и; при этом отдельно рассматриваются случаи, когда из каждой точки исходят

не более двух диаметров, и когда есть точка, из которой исходят $\geqslant 3$ диаметров.

б) Число диаметров-отрезков системы n точек пространства может равняться $2n-2$, но не может превзойти $2n-2$. Доказать последнее утверждение можно методом математической индукции. А именно, обозначьте число диаметров, исходящих из каждой из n точек через $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, и рассмотрите отдельно случаи, когда некоторое число $\delta_i \leqslant 2$ (где $i = 1, 2, 3, \ldots$ или n) и когда все $\delta_i \geqslant 3$. Первый случай легко отбросить, воспользовавшись индуктивным предположением, касающимся систем из $n-1$ точек; во втором, более сложном случае рассмотрите общую часть Π n шаров радиуса 1 с центрами во всех наших точках и с помощью теоремы Эйлера о выпуклых многогранниках (грани которых могут быть не плоскими) изучите возможное устройство тела Π.

88. Если $\frac{1}{k-2} > a \geqslant \frac{1}{k-1}$ (где $k < n-1$), то наши n точек целесообразно группировать около k точек, делящих отрезок A_1A_n на $k-1$ равных частей (концы отрезка сюда включаются), разбив их на k групп; в случае, когда n дает при делении на k остаток r, т. е. $n = kl + r$, мы получим $k-r$ групп по l точек и r групп по $l+1$ точек, соответственно чему из C_n^2 попарных расстояний между точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мы будем иметь $(k-r)\,C_l^2 + rC_{l+1}^2$ малых расстояний, а все остальные будут не меньше a.

89. Используйте результаты задач 87 а) и 82 (для решения задачи в) нам понадобится также аналог результата задачи 82, относящийся к случаю $n = 6$ — см. текст на стр. 70); в случаях, когда число не меньших a отрезков меньше полного числа C_n^2 попарных расстояний между точками, удобно считать, что некоторые из этих расстояний очень малы.

90. 5.

91. Воспользуйтесь тем, что каждая точка A_i нашей системы точек может служить концом $\leqslant 6$ минидиаметров.

92. а) Рассмотрите фигуру, образованную теми диаметрами A_1A_2 и B_1B_2 фигуры F, середины A и B которых являются концами диаметра фигуры $z(F)$; воспользуйтесь тем, что медиана треугольника со сторонами длин a, b и c, делящая пополам сторону длины a, равна $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, и выясните, в каком случае отрезок AB будет иметь наибольшую возможную длину.

б) Решается аналогично задаче а).

93. а) Предположите, что одна пара противоположных сторон квадрата упирается в границу фигуры F.

б) Воспользуйтесь или тем, что наименьшая окружность, содержащая внутри себя фигуру F, обязательно содержит либо две точки F, являющиеся диаметрально противоположными точками окружности, либо три точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника, или результатом задачи в).

в) Пусть $Ш$ — содержащий F шестиугольник с равными $120°$ углами, все стороны которого упираются в контур фигуры F; рассмотрите, как меняется этот шестиугольник при непрерывном изменении направления «первой» его стороны, и выведите, что можно найти такой описанный вокруг F шестиугольник, противоположные стороны которого равны между собой.

г) Первое решение. Рассмотрите два описанных вокруг F равносторонних треугольника со взаимно параллельными (но «противоположно направленными») сторонами.

Второе решение. Воспользуйтесь результатом задачи в).

94. а) $0 < r \leqslant r_0$, где r_0 — радиус *вписанного* круга треугольника T; $R_0 \leqslant R < \infty$, где R_0 — радиус *описанного* круга треугольника T, и T — остроугольный; $a/2 \leqslant R < \infty$, где a — наибольшая сторона треугольника T, и T — не остроугольный.

б) Пусть a, b, c — стороны треугольника T, а A, B, C — его углы и $a \geqslant b \geqslant c$; пусть еще r_0 — радиус вписанного круга этого треугольника. Тогда $r_0 < \rho < \frac{1}{2} a \operatorname{cosec} B$.

в) Воспользуйтесь результатом задачи а).

г) Докажите, что если K_1, K_2, K_3, ... — наименьшие круги, содержащие всевозможные *тройки* из наших точек, то наибольший из этих кругов содержит все рассматриваемые точки.

95. а) Рассмотрите множество центров всех имеющихся кругов и наименьший круг, полностью «покрывающий» это множество.

б) Постройте круги радиусов $\sqrt{3}/3$ с центрами во всех точках, составляющих фигуру F.

96. а) Отрежьте от квадрата задачи 93 а) четыре «уголка», подобных фигурирующим в условии настоящей задаче; воспользуйтесь тем, что два противоположных из них таковы, что внутренняя точка одного удалена на расстояние $\geqslant 1$ от каждой точки другого.

б) Ср. с указанием к решению задачи а).

97. а) Примите за центр круга середину ломаной.

б) Круг радиуса $1/4$.

98. а) Пусть ABC — правильный треугольник, CF (где F — точка стороны AB) — прямая, образующая небольшой угол φ со стороной CA, E — произвольная точка стороны CA треугольника, G — середина отрезка CF, CDG — ломаная, симметричная ломаной FEG относительно точки G. Если угол φ мал, то ломаная $CDGEF$ заключается внутри $\triangle ABC$ и не может быть заключена внутри равностороннего треугольника, *меньшего* $\triangle ABC$, откуда следует отрицательный ответ на поставленный вопрос.

б) Да, можно.

99. а) Докажите, что существует окружность, пересекающая все наши прямые и такая, что она касается двух параллельных из наших прямых или вписана в треугольник, образованный тремя из этих прямых.

б) Докажите, что каждые три из рассматриваемых прямых можно пересечь кругом радиуса $\sqrt{3}/6$.

100. а) Докажите, что наименьший круг, заключающийся внутри выпуклого многоугольника M, обязательно касается либо двух параллельных сторон M, либо трех сторон M, образующих при продолжении остроугольный треугольник.

б) Таким является, например, правильный треугольник.

101—102. а) Воспользуйтесь методом математической индукции; используйте результат задачи 87 а) (или 87 б)).

б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

103. а) При $n = 2 - 6$ рассмотрите части, на которые распадается окружность круга Kp; при $n = 7$ отдельно рассмотрите случаи, когда все 7 частей круга содержат части его окружности и когда таких частей $\leqslant 6$.

б) В случаях $n = 2$—4 рассмотрите, как распределяются между частями квадрата его вершины.

в) В случаях $n = 3$, 4 и 5—6 рассмотрите 3 вершины $Тр$; 3 вершины и центр $Тр$; 3 вершины $Тр$ и 3 середины его сторон.

104. а)—в). Воспользуйтесь результатами задач 93 в); 93 а); 93 в) соответственно.

105. а) 6; б) 12; в) 18 (воспользуйтесь результатом задачи 118 б).

106. 8. Воспользуйтесь результатом задачи 20 или рассмотрите концентрический с данным и параллельно данному расположенный квадрат со стороной 2.

107. а) 6. б) 8.

108. а)—в). Воспользуйтесь результатами задачи 103 а).

109. Воспользуйтесь тем, что ни один из кругов k_1, k_2, ... не может покрыть большую 60° дугу окружности круга K.

110. а) Воспользуйтесь результатом задачи 6 б).

б) Рассмотрите треугольник, образованный центрами трех заключенных внутри K непересекающихся кругов; воспользуйтесь результатом задачи 71 б).

111. Докажите, что всякий выпуклый многоугольник M можно заключить в треугольник или параллелограмм, сторонами которого являются прямые, содержащие стороны M.

112. Воспользуйтесь результатом задачи 111.

113. Воспользуйтесь результатом задачи 112.

114. Опишите на данном круге, как на экваторе, полусферу и рассмотрите полупояса и полусегменты сферы, которые проектируются в покрывающие круг полоски. Ответ. $k = [2R] + 1$ или $k = 2R$.

115. а) 1 или 2.

б) 1, 2, или 3 (см. задачу 93 в).

116. Рассмотрите $n(1, M)$ непересекающихся кругов радиуса 1, расположенных внутри M, и $n(1, M)$ концентрических с ними кругов радиуса 2.

117. а) Воспользуйтесь результатами задач 108 и 109.

б) Сведите задачу к вопросу об «оптимальном» покрытии квадрата равными кругами.

118. а) Обозначим радиус *наименьшего* круга, внутри которого можно поместить n точек так, что одна из точек совпадает с центром круга и расстояние между каждыми двумя из точек $\geqslant 1$, через R_n; тогда $R_2 = R_3 = \ldots = R_7 = 1$ и $R_n = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n-1}$ при $n = 8$, 9, 10, 11. Для доказательства этого воспользуйтесь результатом задачи 20.

б) 19. То, что внутри круга радиуса 2 нельзя поместить 20 точек, удовлетворяющих условию задачи, следует из результата задачи 20 (рассмотрите разные варианты расположения точек).

119. Можно — достаточно расположить эти станции в вершинах вписанного в поверхность планеты куба.

120. а) При $n = 2$, 3 решение задачи почти очевидно; при $n = 5$, 6 оно следует из результата задачи 35. Если $n = 4$, то предварительно надо решить задачу: *расположить на сфере четыре точки A, B, C, D так, чтобы расстояния DA, DB, DC все были $\geqslant a$, а наименьшее из расстояний AB, BC, CA было возможно большим.*

б) Искомое число точек равно 6 в случае 1° и 4 в случае 2°,

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Вып. 1. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.

Вып. 2. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы планиметрии.

Вып. 3. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия).

Вып. 4. **И. М. Яглом и В. Г. Болтянский,** Выпуклые фигуры.

Вып. 5. **А. М. Яглом и И. М. Яглом,** Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

Вып. 6. **Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский,** Математические беседы.

Вып. 7. **И. М. Яглом,** Геометрические преобразования, I. Движения и преобразования подобия.

Вып. 8. **И. М. Яглом,** Геометрические преобразования, II. Линейные и круговые преобразования.

Вып. 9. **М. Б. Балк,** Геометрические приложения понятия о центре тяжести.

Вып. 10. **Г. Радемахер и О. Теплиц,** Числа и фигуры (опыты математического мышления).

Вып. 11. **И. М. Яглом,** Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.

Вып. 12. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.

Вып. 13. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.



87 к.